経済学と数理ファイナンス

原 千秋

京都大学 経済研究所
http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/~hara/

2009 年 5 月 12 日

金融派生商品の値付け：問題の設定

- 株と債券が取引可能．取引費用や借入・空売制約などはなし．
- 現在の株価は 100 円．1 年後には確率 1/2 で 10% 上がり，残りの確率 1/2 で 2% 値下がりすると仮定．
- 債券は，1 年後に償還される額面 100 円割引債の割引債で，利回り 2%（単利）と仮定．連続複利は $\log 1.02 \approx 0.0198$.
- 割引債を 100 円分 $= 1.02$ 枚購入すれば（100 円預金すれば），1 年後に 102 円もらえる．つまり

$$\text{割引債購入} \Leftrightarrow \text{預金} \qquad \text{割引債空売} \Leftrightarrow \text{借金}$$

先渡契約

株の先渡契約の受渡価格 K を決める問題を考えよう．一般に，受渡価格は契約締結時の価値がちょうどゼロになって，したがってその時点では金銭の授受が必要ないように定められる（レバレッジ levarage）：

$$(100, 100, 0) \left\langle \begin{array}{l} (110, 102, 110 - K) \\ \\ (98, 102, \; 98 - K) \end{array} \right.$$

先渡契約のペイオフ（価値）の期待値をゼロにするには，K は

$$\frac{1}{2}(110 - K) + \frac{1}{2}(98 - K) = 0$$

を満たさねばならない．よって $K = 104$ であるが，正当（fair）な受渡価格は $K = 102$．なぜか？

裁定取引 arbitrage：先渡契約の場合

- もし $K > 102$ ならば，先渡契約を売る（株を売る約束をする）とともに，100 円借りて 1 株買うことにすると，今日の支払いはゼロだが，1 年後の受け取りは $K - 102 > 0$.
- もし $K < 102$ ならば，先渡契約を買う（株を買う約束をする）とともに，1 株空売りしてその売り上げを貯金することにすると，今日の支払いはゼロだが，1 年後の受け取りは $102 - K > 0$.
- 裁定取引非存在条件による値付け：$K = 102$ が唯一可能な受渡価格.
- 額面 100 円の割引債を $K/100$ 枚空売りして（$K/1.02$ 円借りて）株を 1 株買えば，先物契約と同じペイオフが得られる．このポートフォリオ portfolio を組むのに必要な費用 D は

$$D = 100 - \frac{100}{1.02}\frac{K}{100}. \quad \text{よって } D = 0 \Leftrightarrow K = 102.$$

裁定取引：オプションの場合

- 株を原資産，1 年後を満期日とする，行使価格 104 円のヨーロッパ型コールオプションの（今日支払われる）価格 C を求めよう．
- オプションのペイオフは $f(X) = \max\{X - 104, 0\}$ で与えられる：

$$(100, 100, C) \left\langle \begin{array}{l} (110, 102, 6) \\ \\ \ (98, 102, 0) \end{array} \right.$$

- オプションのペイオフを複製する（replicate）株券と価格 100 円分の割引債のポートフォリオ (a, b) は，

$$\begin{cases} 110a + 102b = 6 \\ 98a + 102b = 0 \end{cases}$$

を満たさねばならない．

デリバティブの価格

- 連立一次方程式 $\begin{cases} 110a + 102b = 6 \\ 98a + 102b = 0 \end{cases}$ の解は $(a, b) = (0.5, -49/102)$.
  よってオプション価格は
  $$100 \times 0.5 + 100 \times \left(-\frac{49}{102}\right) = \frac{2}{1.02} \approx 1.96.$$

- 一般のデリバティブ f の場合，満たすべき連立一次方程式は
  $$\begin{cases} 110a + 102b = f(110), \\ 98a + 102b = \quad f(98). \end{cases}$$
  したがって
  $$\text{解 } (a, b) = \left(\frac{f(110) - f(98)}{12}, \frac{-98f(110) + 110f(98)}{1224}\right)$$
  $$\text{デリバティブ価格} = \frac{1}{3.06} f(110) + \frac{1}{1.52} f(98).$$

複製ポートフォリオとデリバティブ価格に関する注意

- 複製ポートフォリオにおける株の保有量

$$a = \frac{f(110) - f(98)}{110 - 98}.$$

デリバティブのペイオフが株価にどの程度影響されるかを表す．連続時間モデルでは微分 $f'(X)$ がデルタ delta と呼ばれ，株の保有量を決める．

- デリバティブ価格

$$\frac{1}{1.02}\left(\frac{1}{3}f(110) + \frac{2}{3}f(98)\right).$$

これは株価が確率 $1/3$ で 10% 上昇し，確率 $2/3$ で 2% 下落するとした時のデリバティブのペイオフの割引現在価値 discounted present value．$(1/3, 2/3)$ がリスク中立的測度 risk-neutral measure．

$$\frac{1}{3} = \frac{1.02 - 0.98}{1.1 - 0.98} \text{ かつ } \frac{2}{3} = \frac{1.1 - 1.02}{1.1 - 0.98}.$$

2 年間のケース

$$
(100, 100) \left\langle \begin{array}{l} (110, 102) \left\langle \begin{array}{l} (110 \times 1.1\ \ , 102 \times 1.02) \\ \\ (110 \times 0.98, 102 \times 1.02) \end{array} \right. \\ \\ (98, 102) \left\langle \begin{array}{l} (98 \times 1.1\ \ , 102 \times 1.02) \\ \\ (98 \times 0.98, 102 \times 1.02) \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

2 年後の株価が X である場合のペイオフが $f(X)$ であるデリバティブの今日の価格を求めよう．$110 \times 0.98 = 98 \times 1.1 = 100 \times 1.1 \times 0.98$ なので，2 年後の株価には 3 つの可能性がある．

後退帰納法 backward induction による価格付け

- 1 年後に株価が 110 円および 98 円の場合のデリバティブの価格は，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
g(110) &= \frac{1}{1.02}\left(\frac{1}{3}f(110\times 1.1)+\frac{2}{3}f(110\times 0.98)\right),\\
g(98) &= \frac{1}{1.02}\left(\frac{1}{3}f(\ 98\times 1.1)+\frac{2}{3}f(\ 98\times 0.98)\right).
\end{aligned}
$$

- よって今日のデリバティブの価格は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1.02}\left(\frac{1}{3}g(110)+\frac{2}{3}g(98)\right)\\
&=\frac{1}{1.02^2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 f\left(100\times 1.1^2\right)+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}f\left(100\times 1.1\times 0.98\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{2}{3}\right)^2 f\left(100\times 0.98^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

1 年後にポートフォリオが組み替えられない場合

- 1 年後にポートフォリオを組み換えるのが可能と仮定した．
- この組み換えにあたり，追加的投資や余剰資金は必要ない．このようなポートフォリオ（の列）は自己資金調達的 self-financing であると呼ばれる． これはデリバティブを購入した場合と同じ．
- この性質が得られるのは，株価にかかわらず，1 年後のオプション価格に価値額が等しくなるように，今日のポートフォリオを選ぶから．
- もし 1 年後にポートフォリオを組み換えるが不可能なら，株価と債券価格の遷移は以下のように表わされる．

$$
(100, 100) \left\langle \begin{array}{rl} (100 \times 1.1^2, 100 \times 1.02^2) & (\text{確率 } 1/4) \\ (100 \times 1.1 \times 0.98, 100 \times 1.02^2) & (\text{確率 } 1/2) \\ (100 \times 0.98^2, 100 \times 1.02^2) & (\text{確率 } 1/4) \end{array} \right.
$$

完備市場（complete market）

1 年後に組み替えられない場合，デリバティブの 2 年後のペイオフ $f(X)$ を複製するポートフォリオ (a, b) は

$$\begin{cases} (100 \times 1.1^2)a + (100 \times 1.02^2)b = f(100 \times 1.1^2) \\ (100 \times 1.1 \times 0.98)a + (100 \times 1.02^2)b = f(100 \times 1.1 \times 0.98) \\ (100 \times 0.98^2)a + (100 \times 1.02^2)b = f(100 \times 0.98^2) \end{cases}$$

の解でなければならない．

命題

デリバティブのペイオフ $f(X)$ が株価 X の線形（アフィン）関数であれば，上記の連立 1 次方程式には解 (a, b) が存在する．線形（アフィン）関数でなければ，解は存在しないことがある．

解が存在しない場合，市場は不完備 incomplete であると言われる．

n 年後に支払うデリバティブ

- デリバティブの価格は 2 項分布によるペイオフの期待値の割引現在価値：

$$\frac{1}{1.02^2}\sum_{k=0}^{2} {}_2C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{2-k} f\left(100 \times 1.1^k \times 0.98^{2-k}\right).$$

これは債券の割引現在価値を期待値に一般化したもの.

- 一般に，n 年後に株価が X である場合のペイオフが $f(X)$ であるデリバティブの価格は

$$\frac{1}{1.02^n}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} f\left(100 \times 1.1^k \times 0.98^{n-k}\right).$$

$(1/3, 2/3)$ がリスク中立的測度.

1 年を n 期間に分割するケース

- まず，債券の利回りと株の収益率を確認しておこう．
  - 債券の連続複利の利回り $\rho = \log 1.02$.
  - 株の収益率を連続複利で表すと，確率 $1/2$ で $\log 1.1$，残りの確率 $1/2$ で $\log 0.98$．平均 μ と標準偏差 σ は

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\log 1.1 + \log 0.98\right), \ \sigma = \frac{1}{2}\left(\log 1.1 - \log 0.98\right).$$

  $\log 1.1 = \mu + \sigma$ かつ $\log 0.98 = \mu - \sigma$ に注意.

- 1 年を n 期間に分割したときの各期の利回りと収益率は？
  - 債券の連続複利の利回りは ρ/n と定める.
  - 株の連続複利の収益率は，確率 $1/2$ で $\mu/n \pm \sigma/\sqrt{n}$ と定める．平均は μ/n，標準偏差は $\sigma/\sqrt{n}$．各期の収益率は独立と仮定.

このとき，債券の 1 年間の連続複利の利回りは $n \times (\rho/n) = \rho$.
株の 1 年間の連続複利の収益率の平均と標準偏差は，それぞれ,

$$n \times \frac{\mu}{n} = \mu, \ \sqrt{n \times \frac{\sigma^2}{n}} = \sigma.$$

デリバティブの価格

任意の実数 z に対し，e^z を $\exp(z)$ と書くことにし，

$$p_n = \frac{\exp(\rho/n) - \exp(\mu/n - \sigma/\sqrt{n})}{\exp(\mu/n + \sigma/\sqrt{n}) - \exp(\mu/n - \sigma/\sqrt{n})},$$
$$q_n = \frac{\exp(\mu/n + \sigma/\sqrt{n}) - \exp(\rho/n)}{\exp(\mu/n + \sigma/\sqrt{n}) - \exp(\mu/n - \sigma/\sqrt{n})}$$

と定めると，$p_n + q_n = 1$ で，1 年後の株価が X のときペイオフ $f(X)$ を支払うデリバティブの価格は

$$e^{-\rho} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, p_n^k q_n^{n-k} f\left(100 \exp\left(k\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + (n-k)\left(\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{1.02} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, p_n^k q_n^{n-k} f\left(100 \exp\left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(2k-n)\right)\right).$$

(p_n, q_n) がリスク中立的測度.

ブラック - ショールズのオプション価格付け公式

コールオプション $f(X) = \max\{X - K, 0\}$ の場合は，中心極限定理により，$n \to \infty$ のとき，上で求められる価格はブラック-ショールズのオプション価格付け公式（Black-Scholes option pricing formula）の価格

$$X_0\Phi(z_1) - Ke^{-\rho}\Phi(z_2),$$

ただしここで

$$\begin{aligned}
X_0 &= 100 \quad \text{（当初の株価）}, \\
\Phi(\cdot) &= \text{標準正規分布の累積分布関数}, \\
z_1 &= \frac{\log X_0/K + \left(\rho + \sigma^2/2\right)}{\sigma}, \\
z_2 &= \frac{\log X_0/K + \left(\rho - \sigma^2/2\right)}{\sigma},
\end{aligned}$$

に収束する．

おわりに

- 資産，裁定取引，複製ポートフォリオなどの定義を与え，金融派生商品の例を挙げ，価格付けの基本的なアイデアを述べた．
- 今後の課題：連続時間への拡張・期待効用（expected utility）など，経済学により近いトピックス
- ファイナンスは文系・理系の両方にまたがる分野なので，多くの学生に勉強を続けて欲しい．