

経済学と数理ファイナンス

原 千秋

京都大学 経済研究所

<http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/~hara/>

2009年4月28日

本講義のねらい

- ▶ **経済学**とは、価格による需要と供給の調整を通じて財・サービスの価格や取引量がどのような水準に決まるかを分析する学問。
- ▶ **ファイナンス**とは、金融資産や証券の値段や取引量を予測する学問。
- ▶ 本講義の目的は、経済学の分析手法を用いてファイナンスの諸問題を説明すること。
- ▶ 数学的アプローチを強調することで、文系と理系の両方の学生にとって興味深い内容を提供したい。
- ▶ 経済現象や金融取引という、日常的な行為を学問的な分析の対象とすることで、表面的なマスコミの報道などに惑わされない、批判的考察を展開できる知識と分析手法を学び取ってほしい。

資産 (asset) とは？

- ▶ 将来時点に価値を持つ財や**有価証券** (財産権を表し, その行使や移転に供せられる証書のこと) で, 経済取引の対象となりうるもの. 特に後者は**金融資産** (financial asset) と呼ばれ, 本講義の分析の対象となる.
- ▶ 株券・債券などの他, 先物契約 (futures contract)・先渡契約 (forward contract)・オプション (option) など**金融派生商品**もその例.
- ▶ 上述の「価値」が生ずる時点やその額が一定の値をとるとは限らない. 時点については複数 (ある期間にわたり価値を持つ) が一般的.
- ▶ よって, 経済分析では, 資産を**確率変数** (random variable) または**確率過程** (stochastic process) とみなすことができる.

株式

- ▶ 企業が事業に必要な資金を調達するために発行する有価証券。配当を受け取ったり、株主総会において投票したりする権利を表す。
- ▶ 受け取る配当の額や株主総会における投票権の有無に応じて、**優先株**や**劣後株**といった違いがあることもある。
- ▶ 現在の株価が P_t , 1年後の株価が P_{t+1} , その間に得られる配当額を D_{t+1} で表すとすると、株の**収益率** (rate of return) は

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}.$$

- ▶ 現在の観点からは、 P_{t+1} と D_{t+1} はもちろん確率変数。よって収益率 R_{t+1} も確率変数。
- ▶ (条件付き) 期待値 $E_t(R_{t+1})$ は**期待収益率** (expected rate of return) と呼ばれる。

債券

- ▶ 政府・地方公共団体・企業などがお金を借りる際に，返済時期や返済額などが明記された有価証券のこと．
- ▶ 有価証券なので，取引可能．償還（返済）前に現金化することも可．
- ▶ 国が発行した（お金を借りる）債券は**国債**，企業が発行した債券は**社債**と呼ばれる．
- ▶ **債務不履行（デフォルト default**，約束した返済額を返さないこと）の可能性あり．
- ▶ ファイナンスでは，債務不履行の可能性は国債にはないが，社債にはあると想定することが多い．

利回り

- ▶ **利回り = 利回り** R は, 1 年間に稼げる利子の元本に対する割合を表す. 100 円預ければ, 1 年後に $100(1 + R)$ 円受け取れる.
- ▶ もし半年毎に利子を受け取ることができ, 半年後に受け取る利子を元本に繰り込むならば, 1 年後には $100(1 + R/2)^2$ 円受け取れる.
- ▶ 一般に, 1 年間に n 回利子を受け取ることができるなら, 1 年後には $100(1 + R/n)^n$ 円受け取れる.
- ▶ ある無理数 e (**自然対数の底**) が存在して, $n \rightarrow \infty$ のとき, $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$ が成立する.
- ▶ 一般に, $(1 + R/n)^n \rightarrow e^R$ が成立. このような R を**連続複利** (continuously compounded interest rate) という.
- ▶ $1 + R < (1 + 2/R)^2 < \dots < e^R$ に注意.

国債の利回りの計算

▶ 国債の分類：

- ▶ **割引債**：償還時にのみ額面（返済額）を支払う国債
- ▶ **利付債**：償還時まで半年毎に利子も支払う国債

▶ 利回りの計算例

- ▶ 1年後に1万円償還する割引債が B 円で取引されているなら，その**利回り** R は以下の式を満たすように定義される：

$$B = 10000e^{-R} \quad (B = \frac{10000}{1+R} \text{ でも可}).$$

- ▶ 2年後に1万円償還し，それまでに半年毎に利子100円（10,000円の1%）も支払う国債が B 円で取引されているなら，その利回り R は以下の式を満たすように定義される：

$$B = 100e^{-R/2} + 100e^{-R} + 100e^{-3R/2} + 10100e^{-2R}.$$

金融派生商品

- ▶ **金融派生商品**（**デリバティブ, derivative**）とは，その価値が他の資産の価値によって定められるような金融資産のこと．この「他の資産」のことを（この金融派生商品の）**原資産**（**げんしさん, underlying asset**）と呼ぶ．
 - ▶ 原資産は1種類の場合も複数種類の場合もある．
 - ▶ 原資産の価値は1時点で評価される場合も複数時点（ある期間にわたる）で評価される場合もある．
 - ▶ 原資産が1種類で，原資産の価値が1時点のみで評価されると仮定しよう．その時点での原資産の価値を確率変数 X ，金融派生商品の価値を確率変数 Y で表すとすると，金融派生商品の定義により，

$$Y = f(X)$$

を満たす実数値関数 f が存在しなければならない．裁定取引や値付けにあたっては，この f が**線形関数**であるか否かが大問題．

金融派生商品の例 1：先渡契約（forward contract）

- ▶ 先渡契約とは，ある資産（商品（commodity）の場合もあれば，金融資産の場合もある）をある時点において，ある価格で買う約束する契約のこと．
- ▶ 今年 10 月に金 1 キロをグラムあたり 3,000 円（受渡価格）で買う先渡契約では：
 - ▶ 原資産：金
 - ▶ 時点 = 受渡期日 delivery date：今年 10 月
 - ▶ 10 月時点での金 1 グラムあたりの価格（直物（じきもの）価格）を X で表すと，この先渡契約の 10 月時点での価値（ペイオフ） Y は $f(X) = 1000(X - 3000)$ である．これは線形関数．
- ▶ 先物契約（futures contract）は，値洗い（ねあらい，先物価格の変動に応じた日々の金銭（差金）の授受）があるのでやや複雑だが，これに似ている．

金融派生商品の例2：オプション（option）

- ▶ オプションとは、ある資産（株券の場合もあれば、日経平均先物のようなそれ自身金融派生商品の場合もある）を、ある時点においてのみ、もしくはある時点（満期日）までに所定の価格（行使価格）で買うもしくは売る権利を保証する契約のこと。
「買う」場合はコールオプション（call option）、「売る」場合はプットオプション（put option）、「ある時点においてのみ」の場合はヨーロッパ型（European）、「ある時点までに」の場合はアメリカ型（American）と呼ばれる。
- ▶ 例えば、今年10月にトヨタ自動車株1株を5,000円で買うヨーロッパ型コールオプションの10月時点での価値を考えよう。
10月時点でのトヨタの株価を X で表すと、オプションの価値 Y は $f(X) = \max\{X - 5000, 0\}$ である。これは非線形関数。
- ▶ オプションの価値が「ある時点までの株価の最高値」などで決まる場合もある。これはルックバックオプション（look-back option）と呼ばれる。

オプションについての注意

オプションの買い手は権利を行使するか否かを自由に決められるが、売り手は買い手の決定に従わねばならない。

- ▶ 株価 X が 7,000 円するとき、行使価格 5,000 円のものヨーロッパ型コールオプションの買い手は権利を行使して 1 株 5,000 円で株を売り手から買い、売り手は $7,000 - 5,000 = 2,000$ 円の損失を被る。
- ▶ 株価 X が 3,000 円するとき、行使価格 5,000 円のものヨーロッパ型コールオプションの買い手は権利を行使せず、売り手は全く損失を被らない。
- ▶ 株価 X が 3,000 円するとき、行使価格 5,000 円のものヨーロッパ型**プット**オプションの買い手は権利を行使して 1 株 5,000 円で株を（オプションの）売り手に売り、売り手は $5,000 - 3,000 = 2,000$ 円の損失を被る。

金融派生商品の例 3

- ▶ **スワップ (swap)** : 2種類の金融資産の交換を約束する契約のこと。交換が一定期間内の複数時点で起こる場合が多い。固定金利と **LIBOR (London Interbank Offer Rate)** の差額を半年毎に支払うなど。
- ▶ **credit default swap (CDS)** : 社債や融資などの債務不履行 (デフォルト default) に対する保険のようなもの。「リーマンショック」や「AIG 破綻」に登場。
- ▶ **CDS の例**
社債を発行した企業が満期までに債務不履行に陥ったら、その時点で社債の額面通りの価格で買い取ることを約束する契約。対価は、債務不履行に陥るまで四半期ごとに額面の 0.5% を支払うなど、一定金額を支払い続けること。

金融派生商品の例 4

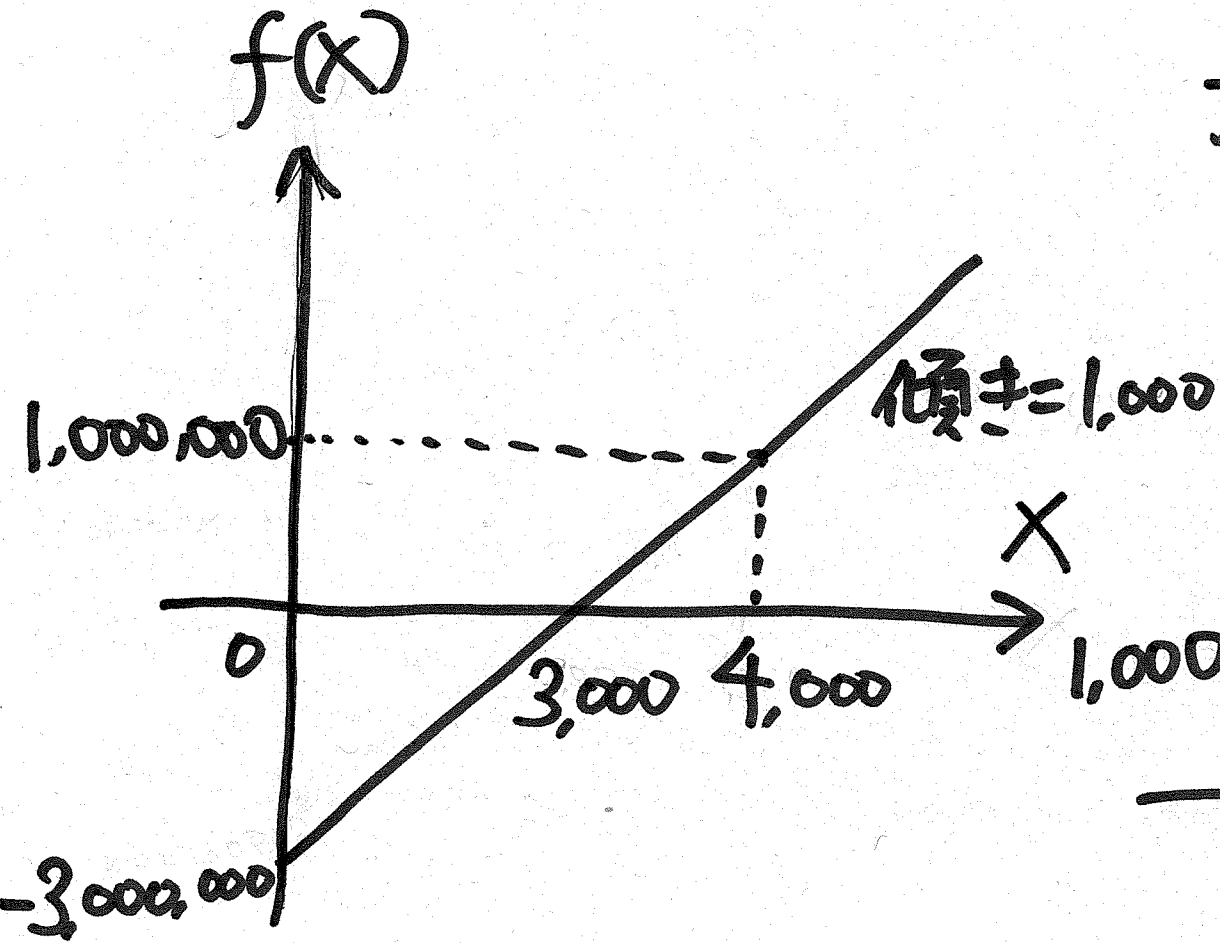
- ▶ **資産担保証券 (asset-backed securities, ABS)** : 債券の償還やローンの支払いのポートフォリオ (集まり) を原資産とする。返済額の総計に応じて、異なる**トランシェ** (tranche 部分・分け前) に属する投資家への支払額が異なる。
- ▶ **債務担保証券 (collateralized debt obligation, CDO)** : 原資産が債券の償還より成る ABS。複数の ABS のトランシェが原資産のことも。「サブプライムローン問題」に登場。

金融派生商品の価値（ペイオフ）の比較

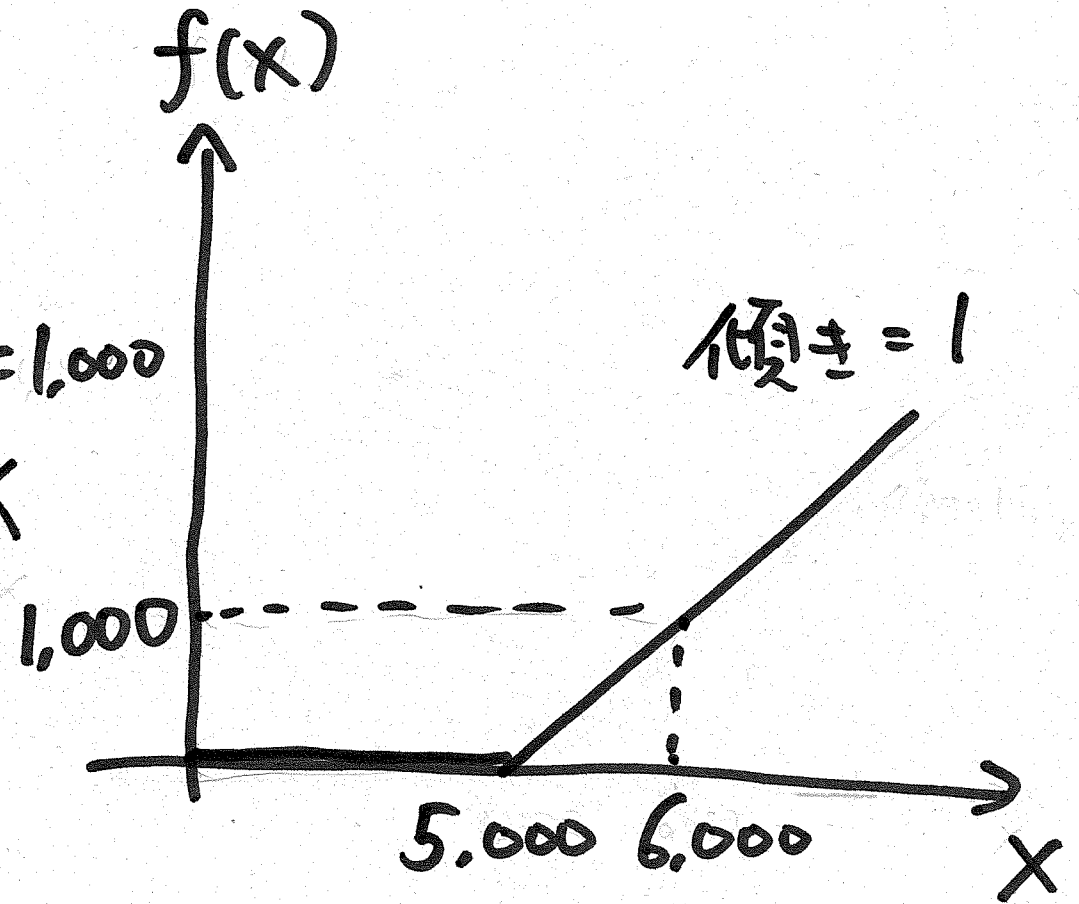
- ▶ 金の先渡契約 $f(X) = 1000(X - 3000)$.
- ▶ トヨタの株のオプション $f(X) = \max\{X - 5000, 0\}$.
- ▶ シニア（senior）・メザニン（mezzanine）・エクイティ（equity）という
 トランシェより成る，1,000万円の借金返済を原資産とする ABS
 - ▶ シニア 75% = 750万円拠出．利回り 6% の予定．
 - ▶ メザニン 20% = 200万円拠出．利回り 10% の予定．
 - ▶ エクイティ 5% = 50万円拠出．利回り 20% の予定．

予定返済額 = $750 \times 1.06 + 200 \times 1.10 + 50 \times 1.20 = 1080$ 万円 = 収益率 8% .

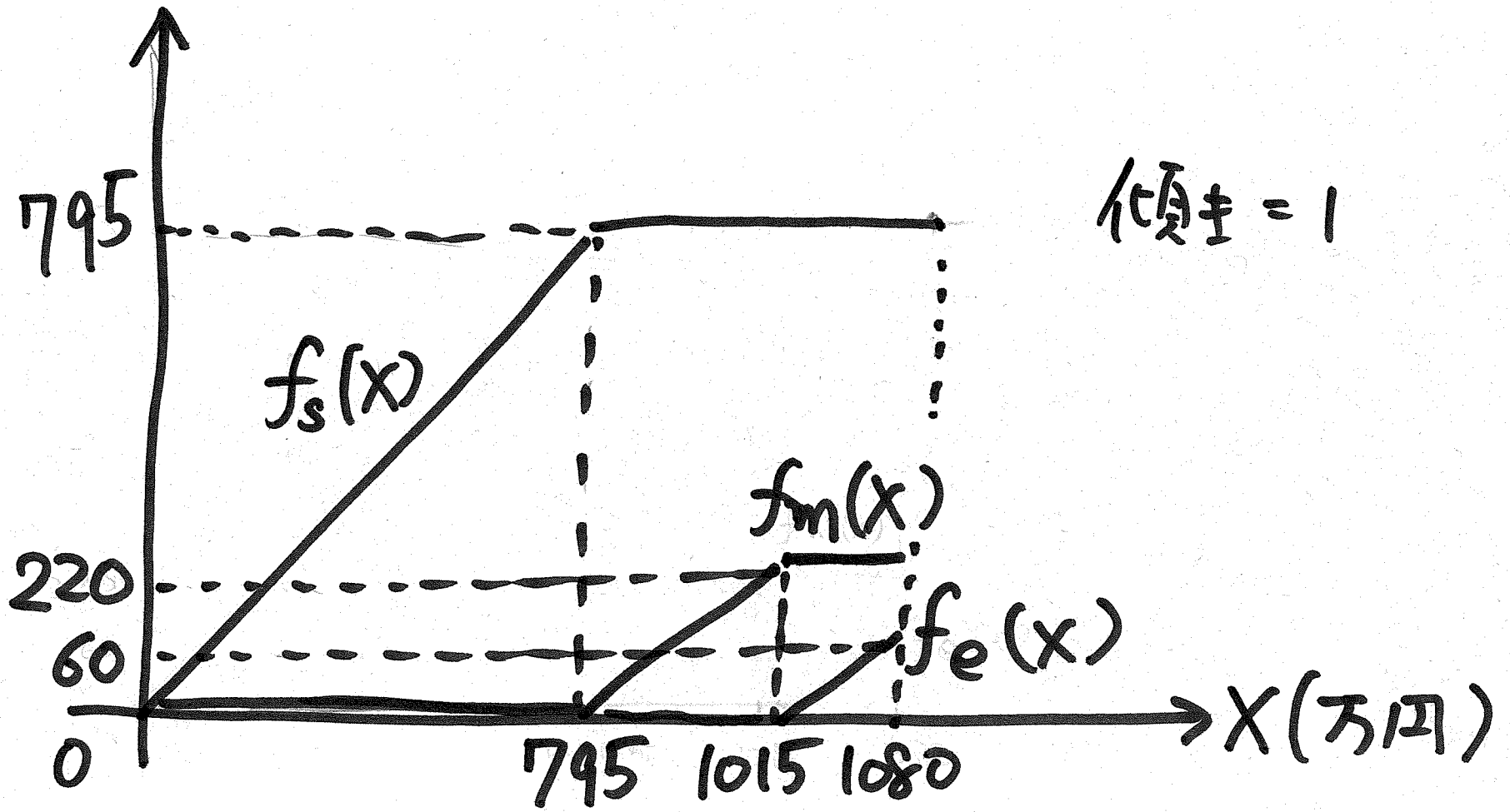
上記の順で返済額が配分される .



金の先渡契約



100株のオプション



ABS