上級ミクロ経済学：試験の解答

川崎　雄二郎*

2009 年 6 月 10 日

1. (a) 初めに，$x \succ y$ を満たす $(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ を求める．定義により，$x \succ y$ は $x \succsim y$ かつ $y \not\succsim x$ を意味するので，以下と同値である．

$$\begin{aligned} x + 1 &\geq y, \\ y + 1 &< x. \end{aligned}$$

ゆえに，任意の $(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ について，$x > y + 1$ のとき，かつそのときのみ，$x \succ y$ を満たす．

次に，$x \sim y$ を満たす $(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ を求める．定義により，$x \sim y$ は $x \succsim y$ かつ $y \succsim x$ を意味するので，以下と同値である．.

$$\begin{aligned} x + 1 &\geq y, \\ y + 1 &\geq x. \end{aligned}$$

ゆえに，任意の $(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ について，$|x - y| \leq 1$ のとき，かつそのときのみ，$x \succ y$ を満たす．

(b) $\succ$ は transitive である．実際，$x \succ y$ かつ $y \succ z$ なる $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ を任意にとると，

$$\begin{aligned} y &< x - 1, \\ z &< y - 1 \end{aligned}$$

なので，

$$z < y - 1 < x - 2 < x - 1$$

より，$x \succ z$ が成り立つ．

一方，$\sim$ は transitive ではない．実際，$(x, y, z) = (0, 0.75, 1.5)$ のとき，

$$\begin{aligned} |0 - 0.75| &= 0.75 \leq 1, \\ |0.75 - 1.5| &= 0.75 \leq 1 \end{aligned}$$

なので $x \sim y$，$y \sim z$ であるが，

$$|0 - 1.5| = 1.5 > 1$$

より $x \nsim z$.

* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程１年．質問は jiro_likes_1a2s3k@msn.com までメールください．

2.（a） x の w に関する1次同次性から，任意の $(p,w)\in \boldsymbol{R}^L_{++}\times \boldsymbol{R}_{++}$，$\alpha>0$ について，

$$x\left(p,\alpha w\right)=\alpha x\left(p,w\right)$$

が成り立つので，両辺を α について微分して $\alpha=1$ で評価すると

$$D_w x\left(p,w\right)w=x\left(p,w\right).$$

ゆえに，

$$D_w x\left(p,w\right)=\frac{1}{w}x\left(p,w\right).$$

（b） Slutsky equation により，任意の $(p,w)\in \boldsymbol{R}^L_{++}\times \boldsymbol{R}_{++}$ について，以下が成り立つ．

$$D_p x\left(p,w\right)=D_p h\left(p,v\left(p,w\right)\right)-D_w x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T.$$

$D_p h\left(p,v\left(p,w\right)\right)$ は対称かつ negative semi-definite であり，また (a) の結果から

$$D_w x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T=\frac{1}{w}x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T$$

より，任意の列ベクトル $v\in \boldsymbol{R}^L$ に対し，

$$\begin{aligned}&v^T\left(D_w x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T\right)v\\&=\frac{1}{w}v^T x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T v\\&=\frac{1}{w}\left(x\left(p,w\right)^T v\right)^2\geq 0\end{aligned}$$

なので（$x\left(p,w\right)^T v\in \boldsymbol{R}$ に注意），$D_w x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T$ は対称かつ positive semi-definite である．したがって $-D_w x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T$ は対称かつ negative semi-definite なので，$D_p x\left(p,w\right)$ は対称かつ negative semi-definite.

3.（a） $u^1=v\left(p^1,w\right)$，$u^0=v\left(p^0,w\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}&CV\left(p^0,p^1,w\right)+EV\left(p^1,p^0,w\right)\\&=e\left(p^1,u^1\right)-e\left(p^1,u^0\right)+e\left(p^1,u^0\right)-e\left(p^1,u^1\right)\\&=0\end{aligned}$$

が成り立つ．

（b） まず初めに，任意の p^0,p^1,p^2 及び w について，$EV\left(p^0,p^1,w\right)\geq EV\left(p^0,p^2,w\right)$ と $v\left(p^1,w\right)\geq v\left(p^2,w\right)$ が同値であることを示す．$i=1,2,3$ に対し $u^i:=v\left(p^i,w\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}&EV\left(p^0,p^1,w\right)\geq EV\left(p^0,p^2,w\right)\\&\Longleftrightarrow e\left(p^0,u^1\right)-e\left(p^0,u^0\right)\geq e\left(p^0,u^2\right)-e\left(p^0,u^0\right)\\&\Longleftrightarrow e\left(p^0,u^1\right)\geq e\left(p^0,u^2\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．支出関数 e は効用水準 $\bar{u}$ に関して非減少関数であることから，$u^1\geq u^2$ ならば

$$e\left(p^0,u^1\right)\geq e\left(p^0,u^2\right)$$

を得る．逆に $e\left(p^0,u^1\right) \geq e\left(p^0,u^2\right)$ のとき，e が $\bar{u}$ に関して厳密な増加関数ならば $u^1 \geq u^2$ が成り立つ．実際，e は効用水準 $\bar{u}$ に関して非減少関数なので，$e\left(p^0,u^1\right) > e\left(p^0,u^2\right)$ ならば $u^1 > u^2$ である．あとは $e\left(p^0,u^1\right) = e\left(p^0,u^2\right)$ ならば $u^1 = u^2$ であることを示せば十分．これについては，

$$h\left(p^0,u^1\right) = x\left(p^0, e\left(p^0,u^1\right)\right) = x\left(p^0, e\left(p^0,u^2\right)\right) = h\left(p^0,u^2\right)$$

なので，効用関数の continuity と strict monotonicity により，$u^1 = u^2$.

次に，一般性を失うことなく，$\succsim$ が第１財に関して準線形であるとする．このとき，任意の p^0,p^1,p^2 及び w について，$p_1^0 = p_1^1 = p_1^2$ ならば $CV\left(p^0,p^1,w\right) \geq CV\left(p^0,p^2,w\right)$ と $v\left(p^1,w\right) \geq v\left(p^2,w\right)$ が同値であることを示す．準線形性により，任意の $p,p' \in \boldsymbol{R}_{++}^L$ 及び $\bar{u},\bar{u}' \in \boldsymbol{R}$ において

$$\frac{e\left(p,\bar{u}'\right) - e\left(p,\bar{u}\right)}{p_1} = \frac{e\left(p',\bar{u}'\right) - e\left(p',\bar{u}\right)}{p_1'}$$

が成り立つ．ゆえに，$p_1 = p_1'$ であれば

$$e\left(p,\bar{u}'\right) - e\left(p,\bar{u}\right) = e\left(p',\bar{u}'\right) - e\left(p',\bar{u}\right)$$

である．すなわち，

$$\begin{aligned} EV\left(p^0,p^1,w\right) &= e\left(p^0,u^1\right) - e\left(p^0,u^0\right) \\ &= e\left(p^1,\bar{u}^1\right) - e\left(p^1,\bar{u}^0\right) \\ &= CV\left(p^0,p^1,w\right), \end{aligned}$$

さらに

$$EV\left(p^0,p^2,w\right) = CV\left(p^0,p^2,w\right)$$

が成り立つことから，前半の議論により $CV\left(p^0,p^1,w\right) \geq CV\left(p^0,p^2,w\right)$ と $v\left(p^1,w\right) \geq v\left(p^2,w\right)$ は同値である．

4.（a）結果のみ示す．

$$\begin{aligned} z_1(w,q) &= \frac{\partial c}{\partial w_1}(w,q) = \frac{w_2^2 q^2}{4\left(4w_1+w_2\right)^2}, \\ z_2(w,q) &= \frac{\partial c}{\partial w_2}(w,q) = \frac{w_1^2 q^2}{\left(4w_1+w_2\right)^2}. \end{aligned}$$

（b）生産可能集合を Y とし，生産財の価格を $p > 0$ とする．任意の $\bar{y} \in Y$ に対し

$$\begin{aligned} w_1\bar{y}_1 + w_2\bar{y}_2 + p\bar{y}_3 &\leq p\bar{y}_3 - w_1 z_1\left(w,\bar{y}_3\right) - w_2 z_2\left(w,\bar{y}_3\right) \\ &= p\bar{y}_3 - \frac{w_1 w_2 \bar{y}_3^2}{4\left(4w_1+w_2\right)} \end{aligned}$$

が成り立つので，p の下での利潤最大化問題は以下の最大化問題に置き換えられる：

$$\max_{q \in \boldsymbol{R}_+} pq - \frac{w_1 w_2 q^2}{4\left(4w_1+w_2\right)}.$$

この問題の解を $s(p)$ とすると，利潤最大化解，すなわち供給関数 $y(p)$ は $y(p) = (-z_1(w, s(p)), -z_2(w, s(p)), s(p))$ によって与えられる．目的関数が q について凹関数であるので，利潤最大化の一階の必要条件から，供給関数を $s : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}_{+}$ とすると

$$p - \frac{w_1 w_2 s(p)}{2(4w_1 + w_2)} = 0$$

が任意の $p > 0$ において成り立つ．ゆえに，

$$s(p) = \frac{2(4w_1 + w_2)}{w_1 w_2} p.$$

したがって，

$$y(p) = \left(-\frac{p^2}{w_1^2}, -\frac{4p^2}{w_2^2}, \frac{2(4w_1 + w_2)}{w_1 w_2} p \right).$$

5. (a) u は絶対的リスク回避度が一定であるから，任意に固定した $\alpha \in \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，効用関数 $x \mapsto u(x)$ と $x \mapsto u(x + \alpha)$ は同程度にリスク回避的である．したがって，

$$\begin{pmatrix} 10 & 30 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ならば，

$$\begin{pmatrix} 10 + \alpha & 30 + \alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 + \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ゆえに，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 + 10 & 30 + 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 18 + 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって，$x = 28$ のときに成り立つ．

（別解） 任意の $x \in \boldsymbol{R}_{++}$ について $t(x) = \frac{1}{\lambda}$ であるとする（ただし，$\lambda > 0$）．このとき，u はある $(A, B) \in \boldsymbol{R}_{--} \times \boldsymbol{R}$ によって

$$u(x) = Ae^{-\lambda x} + B, \forall x \in \boldsymbol{R}_{++}$$

と表わされる．仮定により，

$$\frac{1}{2} e^{-10\lambda} + \frac{1}{2} e^{-30\lambda} = e^{-18\lambda}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(20) + \frac{1}{2} u(40) &= A \left(\frac{1}{2} e^{-20\lambda} + \frac{1}{2} e^{-40\lambda} \right) + B \\ &= e^{-10\lambda} A \left(\frac{1}{2} e^{-10\lambda} + \frac{1}{2} e^{-30\lambda} \right) + B \\ &= e^{-10\lambda} A \cdot e^{-18\lambda} + B \\ &= Ae^{-28\lambda} + B. \end{aligned}$$

ゆえに，$x = 28$ のときに成り立つ．

（b）$x \in \boldsymbol{R}_{++}$ を任意にとる．x における絶対リスク許容度の弾力性を $e(x)$ とすると，

$$\begin{aligned} e(x) &= t'(x) \cdot \frac{x}{t(x)} \\ &= -\frac{(u''(x))^2 - u'(x)\,u'''(x)}{(u''(x))^2} \cdot \left(-\frac{xu''(x)}{u'(x)}\right) \\ &= \frac{(u''(x))^2 - u'(x)\,u'''(x)}{u''(x)} \cdot \frac{x}{u'(x)} \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned} & e(x) \geq 1 \\ \iff & \frac{(u''(x))^2 - u'(x)\,u'''(x)}{u''(x)} \cdot \frac{x}{u'(x)} \geq 1 \\ \iff & \Big((u''(x))^2 - u'(x)\,u'''(x)\Big)\,x - u''(x)\,u'(x) \leq 0 \\ \iff & (u''(x) + xu'''(x))\,u'(x) - x\,(u''(x))^2 \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{xu''(x)}{u'(x)}\right) = -\frac{(u''(x) + xu'''(x))\,u'(x) - x\,(u''(x))^2}{(u'(x))^2}$$

であるから，

$$e(x) \geq 1 \iff \frac{d}{dx}\left(-\frac{xu''(x)}{u'(x)}\right) \leq 0$$

が成り立つ．