上級ミクロ経済学：中間試験

担当：京都大学経済研究所　原 千秋

2009年6月3日 10:30–12:00

解答にあたっての注意

1. この試験は5問より成る．任意の数の問に対して解答を試みてよいが，4問に完答すれば成績Aに相当する点数に十分である．
2. 設問および解答の内容に応じて証明・反例・値等を与えること．
3. 講義・講義ノート・宿題で触れられた命題などを用いるときは，それとわかるように明示的に言及すること．
4. 特に断らない限り，問題で与えられる関数は何回でも微分可能と仮定してよい．

1. $\boldsymbol{R}$ 上の 2 項関係 $\succsim$ を，任意の $(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ に対し，$x+1 \geq y$ のときに $x \succsim y$ が成り立つとして定義する．また，$\succsim$ の厳密な部分（strict part, asymmetric part）を $\succ$ で，無差別な部分（indifference part, symmetric part）を $\sim$ で表す．

   (a) いかなる $(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ に対して $x \succ y$ が成り立つか？また，いかなる $(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ に対して $x \sim y$ が成り立つか？

   (b) $\succ$ および $\sim$ は推移的（transitive）か？

2. $\succsim$ は $\boldsymbol{R}^L_{++}$ 上で定義された相似的（homothetic）な選好関係であるとする．x は $\succsim$ から導出された（Walrasian, Marshallian）需要関数とする．

   (a) 任意の $(p,w) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，

   $$D_w x(p,w) = \frac{1}{w} x(p,w)$$
   $$\text{（つまり，}\frac{\partial x_\ell}{\partial w}(p,w) = \frac{1}{w} x_\ell(p,w) \ \ (\ell = 1,2,\ldots,L))$$

   が成立することを証明せよ．

   (b) 任意の $(p,w) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，価格ベクトル p に関するヤコビ行列 $D_p x(p,w)$ は対称かつ負値半定符号（negative semi-definite）であることを証明せよ．

3. $\boldsymbol{R}^L_{+}$ 上の 2 項関係 $\succsim$ に対し，$EV(p^0,p^1,w)$ と $CV(p^0,p^1,w)$ を， 富水準を w に維持したまま，価格ベクトルが p^0 から p^1 に変化したときの等価変分および補償変分とする．

   (a) $CV(p^0,p^1,w) + EV(p^1,p^0,w) = 0$ を証明せよ．

   (b) 任意の価格ベクトル p^0,p^1,p^2 と富水準 w に対し，$EV(p^0,p^1,w) \geq EV(p^0,p^2,w)$ と $v(p^1,w) \geq v(p^2,w)$ が同値であることを証明せよ．また，$\succsim$ が第 1 財について準線形（quasi-linear）であるとき，$CV(p^0,p^1,w) \geq CV(p^0,p^2,w)$ と $v(p^1,w) \geq v(p^2,w)$ が同値であるための，p^0,p^1,p^2 に関する十分条件を挙げよ．

4. 2種類の生産要素から1種類の財を産出する生産関数から導出された費用関数が

$$c(w, q) = \frac{w_1 w_2 q^2}{4\,(4w_1 + w_2)}$$

で与えられるとする．ここで，$w = (w_1, w_2)$ は要素価格ベクトル，q は産出量を表す．

(a) 条件付要素需要関数（conditional factor demand function）を求めよ．

(b) 供給関数（利潤を最大にする投入産出量）を求めよ．

5. 効用関数 $u : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}$ は，任意の $x \in \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，$u'(x) > 0 > u''(x)$ を満たすとする．u の絶対的リスク許容度 $t : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}_{++}$ を，$t(x) = -u'(x)/u''(x)$ と定義する．

(a) $t(x)$ が x によらずに一定の値をとるとしたとき，もし

$$\frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(30) = u(18)$$

ならば，いかなる x に対して

$$\frac{1}{2}u(20) + \frac{1}{2}u(40) = u(x)$$

が成立するか？

(b) 絶対的リスク許容度の弾力性が任意の x において1以上であることと，u の相対的リスク回避度が x の非増加（non-increasing）関数であることが同値であることを証明せよ．