

上級ミクロ経済学：解答 6

川崎 雄二郎*

2009年5月29日

1. 示したい命題は以下の通り：

$$q(x, u) < 1, \forall x \in \mathbf{R}_{++} \iff \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2.$$

ここで,

$$q(x, u) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = u'(xy) + xyu''(xy)$$

である.

(\implies) 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ について, $u'(x) > 0$ より

$$-\frac{xu''(x)}{u'(x)} < 1$$
$$u'(x) + xu''(x) > 0$$

が成り立つので, 任意の $(x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2$ に対し, $z = xy$ とすれば $z \in \mathbf{R}_{++}$ であるから

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = u'(z) + zu''(z) > 0.$$

(\impliedby) 任意の $(x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2$ について

$$u'(xy) + xyu''(xy) > 0$$

が成り立つので, $y = 1$ とすれば

$$u'(x) + xu''(x) > 0.$$

よって, $u'(x) > 0$ より

$$q(x, u) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} < 1.$$

* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程1年. 質問は jiro_likes_1a2s3k@msn.com までメールください.

2. 任意の $i = 1, 2$, 及び $x \in \mathbf{R}_{++}$ について, $r(x, u_i)$ は以下のように表される:

$$r(x, u_i) = -\frac{u_i''(x)}{u_i'(x)}.$$

したがって, $r(x, u_1) > r(x, u_2)$ は

$$-\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} > -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)},$$

と書き換えられるので, 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ に対し $u_1'(x) > 0$ かつ $u_2'(x) > 0$ であるから,

$$u_2''(x)u_1'(x) - u_2'(x)u_1''(x) > 0$$

と同値である. これにより, 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ について, 比 $\frac{u_2'(x)}{u_1'(x)}$ の (x に関する) 微分は

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u_2'(x)}{u_1'(x)} \right) = \frac{u_2''(x)u_1'(x) - u_2'(x)u_1''(x)}{(u_1'(x))^2}$$

であるから, この値が正であることと $r(x, u_1) > r(x, u_2)$ は同値である.

3. 定義により, 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ に対し, $r(x, u)$, $r(x, -u')$ 及び $r'(x, u)$ は以下のように表される.

$$\begin{aligned} r(x, u) &= -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \\ r(x, -u') &= -\frac{-u'''(x)}{-u''(x)} = -\frac{u'''(x)}{u''(x)}, \\ r'(x, u) &= -\frac{u'''(x)u'(x) - (u''(x))^2}{(u'(x))^2}. \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ について, $r'(x, u) < 0$ は

$$u'''(x)u'(x) - (u''(x))^2 > 0$$

と同値であり, さらに $u'(x) > 0$ かつ $u''(x) < 0$ であるから,

$$\begin{aligned} -(u''(x))^2 &> -u'''(x)u'(x) \\ \iff -\frac{(u''(x))^2}{u'(x)} &> -u'''(x) \\ \iff -\frac{u''(x)}{u'(x)} &< -\frac{u'''(x)}{u''(x)}. \end{aligned}$$

したがって

$$r'(x, u) < 0 \iff r(x, u) < r(x, -u')$$

を得る.

(a) \succsim が $e = (1, \dots, 1)$ の方向に準線形であるということと, 任意の $x \in \mathbf{R}^M$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 及び $m \neq n$ なる $m, n \in \Omega$ について限界代替率

$$\frac{\partial U}{\partial x_m}(x + \alpha e) \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_n}(x + \alpha e)$$

が α に依存しないことは同値である. すなわち,

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial x_m}(x + \alpha e) \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_n}(x + \alpha e) \right) = 0$$

であること, ゆえに,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial x_m}(x + \alpha e) \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_n}(x + \alpha e) \right) \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\pi_m u'(x_m + \alpha)}{\pi_n u'(x_n + \alpha)} \right) \\ &= \frac{\pi_m u''(x_m + \alpha) u'(x_n + \alpha) - u'(x_m + \alpha) u''(x_n + \alpha)}{\pi_n (u'(x_n + \alpha))^2} \end{aligned}$$

より,

$$u''(x_m + \alpha) u'(x_n + \alpha) - u'(x_m + \alpha) u''(x_n + \alpha) = 0$$

であることと同値である.

u が一定の絶対的リスク回避度を持つとき, 任意の $x \in \mathbf{R}^M$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 及び $i, n \in \Omega$ について

$$-\frac{u''(x_i + \alpha)}{u'(x_i + \alpha)} = -\frac{u''(x_n + \alpha)}{u'(x_n + \alpha)}$$

であるので,

$$u''(x_m + \alpha) u'(x_n + \alpha) - u'(x_m + \alpha) u''(x_n + \alpha) = 0$$

が成り立つ. 逆に, 任意の $x \in \mathbf{R}^M$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 及び $m, n \in \Omega$ に対し,

$$u''(x_m + \alpha) u'(x_n + \alpha) - u'(x_m + \alpha) u''(x_n + \alpha) = 0$$

が成り立つとすると, $\alpha = 0$ とすれば

$$-\frac{u''(x_m)}{u'(x_m)} = -\frac{u''(x_n)}{u'(x_n)}$$

なので, $x \in \mathbf{R}^M$ の任意性から, u の絶対的リスク回避度は一定.

(別解) u が絶対的リスク回避度が一定であるとき, ある $(A, B) \in \mathbf{R}_{--} \times \mathbf{R}$ が存在して

$$u(x) = Ae^{-\lambda x} + B$$

が成り立つことを用いて, \succsim が $e = (1, \dots, 1)$ の方向に準線形であることを証明してもよい. これについての証明は, 問5を参照されたい.

(b) \succsim が homothetic であるということと, 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}^M$, $\alpha > 0$ 及び $m \neq n$ なる $m, n \in \Omega$ について限界代替率

$$\frac{\partial U}{\partial x_m}(\alpha x) \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_n}(\alpha x)$$

が α に依存しないことと同値である. すなわち,

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial x_m}(\alpha x) \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_n}(\alpha x) \right) = 0$$

であること, ゆえに,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial x_m}(\alpha x) \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_n}(\alpha x) \right) \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\pi_m u'(\alpha x_m)}{\pi_n u'(\alpha x_n)} \right) \\ &= \frac{\pi_m x_m u''(\alpha x_m) u'(\alpha x_n) - u'(\alpha x_m) x_n u''(\alpha x_n)}{\pi_n (u'(\alpha x_n))^2} \end{aligned}$$

より,

$$x_m u''(\alpha x_m) u'(\alpha x_n) - x_n u'(\alpha x_m) u''(\alpha x_n) = 0$$

であることと同値である.

u が一定の相対的リスク回避度を持つとき, 任意の $x \in \mathbf{R}^M$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 及び $m, n \in \Omega$ について

$$-\frac{\alpha x_m u''(\alpha x_m)}{u'(\alpha x_m)} = -\frac{\alpha x_n u''(\alpha x_n)}{u'(\alpha x_n)}$$

であるので,

$$x_m u''(\alpha x_m) u'(\alpha x_n) - x_n u'(\alpha x_m) u''(\alpha x_n) = 0$$

が成り立つ. 逆に, 任意の $x \in \mathbf{R}^M$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 及び $m, n \in \Omega$ に対し,

$$x_m u''(\alpha x_m) u'(\alpha x_n) - x_n u'(\alpha x_m) u''(\alpha x_n) = 0$$

が成り立つとすると, $\alpha = 1$ とすれば

$$-\frac{x_m u''(x_m)}{u'(x_m)} = -\frac{x_n u''(x_n)}{u'(x_n)}$$

なので, $x \in \mathbf{R}^M$ の任意性から, u の相対的リスク回避度は一定.

(別解) u が相対的リスク回避度が一定であるとき, ある $(A', B') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ が存在して

$$u(x) = Ax^{1-\gamma} + B$$

が成り立つことを用いて, \succsim が homothetic であることを証明してもよい. 実際, 相対的リスク回避度を γ とすると, 任意の $x \in \mathbf{R}_{++}$ について

$$-\frac{xu''(x)}{u'(x)} = \gamma$$

なので,

$$\begin{aligned}\frac{u''(x)}{u'(x)} &= -\frac{\gamma}{x} \\ \frac{d}{dx} \log(u'(x)) &= -\frac{\gamma}{x} \\ \log(u'(x)) &= -\gamma \log x + C' \\ u'(x) &= e^{C'} x^{-\gamma} \\ u(x) &= \frac{e^{C'}}{1-\gamma} x^{1-\gamma} + B'\end{aligned}$$

より(ただし, B', C' は積分定数), $A' = \frac{e^{C'}}{1-\gamma}$ とすることにより得られる.

4. u は2回連続微分可能であるとし, 任意の $x \in \mathbf{R}$ について $u'(x) > 0$ かつ $u''(x) < 0$ であるとする.

ある $(a, b) \in \mathbf{R}_{++}^2$ 及び狭義の単調増加関数が存在して, 任意の $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対し,

$$U(x, y) = \varphi(ax - by^2)$$

が成り立つことを示す.

一定の絶対的リスク回避度 λ を持つとき, u はある $(A, B) \in \mathbf{R}_{--} \times \mathbf{R}$ が存在して以下のように表される:

$$u(x) = Ae^{-\lambda x} + B.$$

これは,

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \lambda > 0$$

により,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log(u'(x)) &= -\lambda \\ \log(u'(x)) &= -\lambda x + C \\ u'(x) &= e^{-\lambda x + C} \\ u(x) &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x + C} + B\end{aligned}$$

より(ただし, B, C は積分定数), $A = -\frac{1}{\lambda} e^C (< 0)$ とすることにより得られる.

ゆえに,

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(Ae^{-\lambda(x+yz)} + B \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Ae^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda yz - \frac{z^2}{2}} dz + B \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Ae^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\lambda^2}{2} y^2} \cdot e^{-\frac{(z+\lambda y)^2}{2}} dz + B \\&= Ae^{-\lambda x + \frac{\lambda^2}{2} y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z+\lambda y)^2}{2}} dz + B.\end{aligned}$$

ここで, 式中の被積分関数は平均 $-\lambda y$, 分散 1 の正規分布の密度関数なので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z+\lambda y)^2}{2}} dz = 1.$$

したがって,

$$U(x, y) = Ae^{-\lambda x + \frac{\lambda^2}{2} y^2} + B.$$

以上から, 狭義の単調増加関数 $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\varphi(w) = Ae^{-\lambda w} + B$$

と定義すると, $(a, b) = (1, \frac{\lambda}{2}) \in \mathbf{R}_{++}^2$ について

$$U(x, y) = \varphi(ax - by)$$

が成り立つ.