上級ミクロ経済学： 宿題 6

京都大学経済研究所 原 千秋

平成 21 年 5 月 26 日

1. $u : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}$ を 2 回連続可微分とする．任意の $x \in \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，$u'(x) > 0$ が成立するとする．関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}_{++}$ を $f(x,y) = u'(xy)$ と定義する．u の x における相対的リスク回避度を $q(x,u)$ と表す．任意の $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2_{++}$ に対し，$q(x,u) < 1$ が成立すること，$\partial^2 f(x,y)/\partial x \partial y > 0$ が成立することは同値であることを証明せよ．

2. $u_1 : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}$ および $u_2 : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}$ を 2 回連続可微分とする．任意の $i = 1,2$ と $x \in \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，$u_i'(x) > 0$ が成立するとする．u_i の x における絶対的リスク回避度を $r(x,u_i)$ で表す．任意の x に対し，$r(x,u_1) > r(x,u_2)$ が成立すること，比 $u_2'(x)/u_1'(x)$ の（x に関する）微分が正であることは同値であることを証明せよ．

3. $u : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}$ を 3 回連続可微分とする．任意の $x \in \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，$u'(x) > 0$ および $u''(x) < 0$ が成立するとする．u の x における絶対的リスク回避度を $r(x,u)$，その（x に関する）微分を $r'(x,u)$ で表す．任意の x に対し $r'(x,u) < 0$ が成立することと，$r(x,u) < r(x,-u')$ が成立することと同値であることを証明せよ．

4. $\{1,2,\dots,M\}$ を有限の状態空間（state space）とし，任意の $m \in \Omega$ に対し，m が起こる確率を $\pi_m > 0$ とする．（したがって，$\sum_m \pi_m = 1$.）

   (a) $u : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を 2 回連続可微分とする．効用関数 $U : \boldsymbol{R}^M \to \boldsymbol{R}$ を，任意の $x \in \boldsymbol{R}^M$ に対し，$U(x) = \sum_m \pi_m u(x_m)$ と定義する．U が表す $\boldsymbol{R}^M$ 上の選好関係を $\succsim$ で表す．このとき，u が一定の絶対的リスク回避度を持つことと，$\succsim$ が $e = (1,1,\dots,1)$ の方向に準線形（つまり，任意の $x \in \boldsymbol{R}^M$，$y \in \boldsymbol{R}^M$，$\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し，$x \succsim y$ と $x + \alpha e \succsim y + \alpha e$ が同値）であることが同値であることを証明せよ．

   (b) $u : \boldsymbol{R}_{++} \to \boldsymbol{R}$ を 2 回連続可微分とする．効用関数 $U : \boldsymbol{R}^M_{++} \to \boldsymbol{R}$ を，任意の $x \in \boldsymbol{R}^M_{++}$ に対し，$U(x) = \sum_m \pi_m u(x_m)$ と定義する．U が表す $\boldsymbol{R}^M_{++}$ 上の選好関係を $\succsim$ で表す．このとき，u が一定の相対的リスク回避度を持つことと，$\succsim$ が相似的（homothetic，任意の $x \in \boldsymbol{R}^M_{++}$，$y \in \boldsymbol{R}^M_{++}$，$\alpha > 0$ に対し，$x \succsim y$ と $\alpha x \succsim \alpha y$ が同値）であることが同値であることを証明せよ．

5. $u : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は一定の絶対的リスク回避度を持つ効用関数とする．F は標準正規分布の累積分布関数とする．任意の $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対し，

$$U(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x + yz)\, dF(z)$$

   と定める．このとき，ある $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2_{++}$ が存在して，任意の $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対し，$U(x,y) = ax - by^2$ が成り立つことを証明せよ．