

# 上級ミクロ経済学：解答 5

川崎 雄二郎\*

2009年5月26日

1. (a) 示したい命題は以下の通り： If  $Y$  is convex,

$$0 \in Y \iff \alpha \bar{y} \in Y, \forall \bar{y} \in Y, \forall \alpha \in [0, 1].$$

( $\Leftarrow$ ) 任意に  $\bar{y} \in Y$  をとり  $\alpha = 0$  とすれば, non-increasing return to scale により

$$0 = 0 \cdot \bar{y} \in Y$$

が成り立つ.

( $\Rightarrow$ )  $\bar{y} \in Y$  を任意にとる. このとき,  $0 \in Y$  及び convexity により, 任意の  $\alpha \in [0, 1]$  について

$$\alpha \bar{y} = \alpha \bar{y} + (1 - \alpha) \cdot 0 \in Y$$

が成り立つ.

(b) 示したい命題は以下の通り：

$$\begin{aligned} \alpha \bar{y} + \alpha' \bar{y}' \in Y, \forall \bar{y}, \bar{y}' \in Y, \forall \alpha, \alpha' \geq 0 \\ \iff \begin{cases} \bar{y} + \bar{y}' \in Y, \forall \bar{y}, \bar{y}' \in Y; \\ \alpha \bar{y} \in Y, \forall \bar{y} \in Y, \forall \alpha \in [0, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) 任意に  $\bar{y}, \bar{y}' \in Y$  にとると,  $Y$  が convex cone であることから,  $\alpha = \alpha' = 1$  とすれば  $\bar{y} + \bar{y}' \in Y$  が成り立つ. また, 任意の  $\bar{y} \in Y$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  に対し  $\alpha' = 0$  とすれば,  $\alpha \bar{y} = \alpha \bar{y} + 0 \cdot \bar{y} \in Y$  が成り立つ.

( $\Leftarrow$ ) 任意の  $\alpha \geq 0$  に対し  $[\alpha]$  を  $\alpha$  以下の最大の整数と定義する.  $\bar{y}, \bar{y}' \in Y$ ,  $\alpha, \alpha' \geq 0$  を任意にとる. このとき,  $[\alpha] > 0$  なら additivity により, また  $[\alpha] = 0$  なら non-increasing return to scale により,

$$[\alpha] \bar{y} \in Y$$

が成り立つ. 同様にして,  $[\alpha'] \bar{y}' \in Y$ . さらに,  $\alpha - [\alpha], \alpha' - [\alpha'] \in [0, 1) \subset [0, 1]$  であるので, non-increasing return to scale により,

$$(\alpha - [\alpha]) \bar{y}, (\alpha' - [\alpha']) \bar{y}' \in Y$$

---

\* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程1年. 質問は jiro\_likes\_1a2s3k@msn.com までメールください.

が成り立つ。したがって、additivity により

$$\begin{aligned}\alpha\bar{y} &= [\alpha]\bar{y} + (\alpha - [\alpha])\bar{y} \in Y, \\ \alpha'\bar{y}' &= [\alpha']\bar{y}' + (\alpha' - [\alpha'])\bar{y}' \in Y.\end{aligned}$$

なので、

$$\alpha\bar{y} + \alpha'\bar{y}' \in Y.$$

2. 以下のような生産可能集合  $Y \subseteq \mathbf{R}^2$  を考える。

$$Y := \{(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathbf{R}^2; \bar{y}_1 \leq 0, \bar{y}_2 \leq -\bar{y}_1, \bar{y}_2 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

まず、 $Y$  が non-increasing return to scale であることを示す。任意に  $\bar{y} \in Y$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  をとると、 $\bar{y} = 0$  ならば  $\alpha\bar{y} = 0 \in Y$  であり、また  $\bar{y} \neq 0$  ならば  $\alpha\bar{y}_1 \leq 0$ ,  $\alpha\bar{y}_2 \leq -\alpha\bar{y}_1$ , 及び  $\alpha\bar{y}_2 \neq 0$  より、 $\alpha\bar{y} \in Y$ 。

しかしながら、 $(-1, 1), (-1, -1) \in Y$  について、

$$\frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{2}(-1, -1) = (-1, 0) \notin Y$$

なので、 $Y$  は convex でない。

さらにもう一つ、以下のような生産可能集合  $Y' \subseteq \mathbf{R}^3$  を考える。

$$Y' := \{(\bar{y}'_1, \bar{y}'_2, \bar{y}'_3) \in \mathbf{R}^3; \bar{y}'_1 \leq 0, \bar{y}'_2 \leq 0, \bar{y}'_3 \leq \max\{-\bar{y}'_1, -\bar{y}'_2\}\}.$$

まず、 $Y'$  が non-increasing return to scale であることを示す。任意に  $\bar{y}' \in Y'$ ,  $\alpha' \in [0, 1]$  をとると、 $\bar{y}'_1 \leq 0$ ,  $\bar{y}'_2 \leq 0$ , 及び  $\bar{y}'_3 \leq \max\{-\bar{y}'_1, -\bar{y}'_2\}$  なので、 $\alpha'\bar{y}'_1 \leq 0$ ,  $\alpha'\bar{y}'_2 \leq 0$ , さらに

$$\alpha'\bar{y}'_3 \leq \alpha' \max\{-\bar{y}'_1, -\bar{y}'_2\} = \max\{-\alpha'\bar{y}'_1, -\alpha'\bar{y}'_2\}$$

が成り立ち、 $\alpha'\bar{y}' \in Y'$ 。

しかしながら、 $(-1, 0, 1), (0, -1, 1) \in Y'$  について、

$$\frac{1}{2}(-1, 0, 1) + \frac{1}{2}(0, -1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \notin Y'$$

なので、 $Y'$  は convex でない。

3. (a)  $\bar{y} \in Y$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  を任意にとる。すると、 $f(0) = 0$  かつ  $f$  は concave function なので、 $\alpha\bar{y}_1 \leq 0$ , なおかつ

$$\begin{aligned}f(-\alpha\bar{y}_1) &= f(\alpha(-\bar{y}_1) + (1 - \alpha) \cdot 0) \\ &\geq \alpha f(-\bar{y}_1) + (1 - \alpha) f(0) \\ &= \alpha f(-\bar{y}_1) \\ &\geq \alpha\bar{y}_2\end{aligned}$$

により、 $\alpha\bar{y} \in Y$  が成り立つ。したがって、 $Y$  は non-increasing return to scale。

(b) 次のような  $f$  から導かれる  $Y$  を考える :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2; \\ \frac{1}{2}x & \text{if } 2 \leq x. \end{cases} .$$

初めに  $Y$  が non-increasing return to scale であることを示す .  $\bar{y} \in Y$  ,  $\alpha \in [0, 1]$  を任意にとる .

(i)  $0 \leq -\bar{y}_1 < 1$  のとき ,

$$\bar{y}_2 \leq f(-\bar{y}_1) = -\bar{y}_1$$

が成り立つ .  $0 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 1$  なので ,

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2 \end{aligned}$$

が成り立つから ,  $\alpha\bar{y} \in Y$  .

(ii)  $1 \leq -\bar{y}_1 < 2$  のとき ,

$$\bar{y}_2 \leq f(-\bar{y}_1) = 1 \leq -\bar{y}_1$$

が成り立つ .  $0 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 1$  ならば ,

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2, \end{aligned}$$

また  $1 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 2$  ならば ,

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= 1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2 \end{aligned}$$

が成り立つから ,  $\alpha\bar{y} \in Y$  .

(iii)  $2 \leq -\bar{y}_1$  のとき ,

$$\bar{y}_2 \leq f(-\bar{y}_1) = -\frac{1}{2}\bar{y}_1 \leq \bar{y}_1$$

が成り立つ .  $0 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 1$  ならば ,

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2, \end{aligned}$$

$1 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 2$  ならば ,

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= 1 \\ &> -\frac{1}{2}\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2, \end{aligned}$$

$2 \leq -\alpha\bar{y}_1$  ならば,

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\frac{1}{2}\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2 \end{aligned}$$

が成り立つから,  $\alpha\bar{y} \in Y$ .

しかしながら,  $f(1) = 1, f(4) = 2$  であるが,

$$f\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} < \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot f(1) + \frac{1}{2} \cdot f(4)$$

であるので,  $f$  は concave function ではない.

4.  $w \in \mathbf{R}^{L-1}, q \in \mathbf{R}, \alpha \geq 0$  を任意にとる.  $\hat{z} \in z(w, \alpha q)$  について,  $f$  の 1 次同次性から

$$\begin{aligned} f(\hat{z}) &\geq \alpha q, \\ \frac{1}{\alpha} f(\hat{z}) &\geq q, \\ f\left(\frac{1}{\alpha} \hat{z}\right) &\geq q, \end{aligned}$$

が成り立つ. また,  $f(\bar{z}) \geq q$  なる任意の  $\bar{z} \in \mathbf{R}_+^{L-1}$  に対し,

$$f(\alpha\bar{z}) = \alpha f(\bar{z}) \geq \alpha q$$

なので,

$$w \cdot (\alpha\bar{z}) \geq w \cdot \hat{z}$$

ゆえに

$$w \cdot \bar{z} \geq w \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \hat{z}\right).$$

したがって,  $\frac{1}{\alpha} \hat{z} \in z(w, q)$  が成り立つので,

$$\hat{z} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \hat{z}\right) \in \alpha z(w, q)$$

を得る. よって  $z(w, \alpha q) \subseteq \alpha z(w, q)$ .

一方,  $z(w, \alpha q) \supseteq \alpha z(w, q)$  については, 上の結果において  $\alpha$  を  $\frac{1}{\alpha}$  に,  $q$  を  $\alpha q$  に置き換えることにより成り立つ.

以上より,

$$z(w, \alpha q) = \alpha z(w, q)$$

が成り立つので,  $z$  は  $q$  に関する同次関数であり, その次数は 1 である.

さらに, 任意の  $w \in \mathbf{R}^{L-1}$ ,  $q \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha \geq 0$  について,  $\hat{z} \in z(w, \alpha q)$ ,  $\hat{z}' \in z(w, q)$  とすると

$$\begin{aligned} c(w, \alpha q) &= w \cdot \hat{z} \\ &= w \cdot (\alpha \hat{z}') \\ &= \alpha (w \cdot \hat{z}') \\ &= \alpha c(w, q) \end{aligned}$$

が成り立つことから,  $c$  は  $q$  に関する同次関数であり, その次数は 1 である.