上級ミクロ経済学：解答 5

川崎　雄二郎*

2009 年 5 月 26 日

1. (a) 示したい命題は以下の通り： If Y is convex,

$$0 \in Y \iff \alpha\bar{y} \in Y, \forall \bar{y} \in Y, \forall \alpha \in [0,1].$$

($\Longleftarrow$) 任意に $\bar{y} \in Y$ をとり $\alpha = 0$ とすれば，non-increasing return to scale により

$$0 = 0 \cdot \bar{y} \in Y$$

が成り立つ．

($\Longrightarrow$) $\bar{y} \in Y$ を任意にとる．このとき，$0 \in Y$ 及び convexity により，任意の $\alpha \in [0,1]$ について

$$\alpha\bar{y} = \alpha\bar{y} + (1-\alpha)\cdot 0 \in Y$$

が成り立つ．

(b) 示したい命題は以下の通り：

$$\begin{aligned} &\alpha\bar{y} + \alpha'\bar{y}' \in Y, \forall \bar{y}, \bar{y}' \in Y, \forall \alpha, \alpha' \geq 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} \bar{y} + \bar{y}' \in Y, \forall \bar{y}, \bar{y}' \in Y; \\ \alpha\bar{y} \in Y, \forall \bar{y}' \in Y, \forall \alpha \in [0,1]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

($\Longrightarrow$) 任意に $\bar{y}, \bar{y}' \in Y$ にとると，Y が convex cone であることから，$\alpha = \alpha' = 1$ とすれば $\bar{y} + \bar{y}' \in Y$ が成り立つ．また，任意の $\bar{y} \in Y$，$\alpha \in [0,1]$ に対し $\alpha' = 0$ とすれば，$\alpha\bar{y} = \alpha\bar{y} + 0 \cdot \bar{y} \in Y$ が成り立つ．

($\Longleftarrow$) 任意の $\alpha \geq 0$ に対し $\lceil \alpha \rceil$ を α 以下の最大の整数と定義する．$\bar{y}, \bar{y}' \in Y$，$\alpha, \alpha' \geq 0$ を任意にとる．このとき，$\lceil \alpha \rceil > 0$ なら additivity により，また $\lceil \alpha \rceil = 0$ なら non-increasing return to scale により，

$$\lceil \alpha \rceil \bar{y} \in Y$$

が成り立つ．同様にして，$\lceil \alpha' \rceil \bar{y}' \in Y$．さらに，$\alpha - \lceil \alpha \rceil, \alpha' - \lceil \alpha' \rceil \in [0,1) \subset [0,1]$ であるので，non-increasing return to scale により，

$$(\alpha - \lceil \alpha \rceil)\bar{y}, (\alpha' - \lceil \alpha' \rceil)\bar{y}' \in Y$$

* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程 1 年．質問は jiro_likes_1a2s3k@msn.com までメールください．

が成り立つ．したがって，additivity により

$$\alpha\bar{y} = \lceil\alpha\rceil\,\bar{y} + (\alpha - \lceil\alpha\rceil)\,\bar{y} \in Y,$$
$$\alpha'\bar{y}' = \lceil\alpha'\rceil\,\bar{y}' + (\alpha' - \lceil\alpha'\rceil)\,\bar{y}' \in Y.$$

なので，

$$\alpha\bar{y} + \alpha'\bar{y}' \in Y.$$

2. 以下のような生産可能集合 $Y \subseteq \boldsymbol{R}^2$ を考える．

$$Y := \left\{(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \boldsymbol{R}^2; \bar{y}_1 \leq 0, \bar{y}_2 \leq -\bar{y}_1, \bar{y}_2 \neq 0\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

まず，Y が non-increasing return to scale であることを示す．任意に $\bar{y} \in Y$，$\alpha \in [0,1]$ をとると，$\bar{y} = 0$ ならば $\alpha\bar{y} = 0 \in Y$ であり，また $\bar{y} \neq 0$ ならば $\alpha\bar{y}_1 \leq 0$，$\alpha\bar{y}_2 \leq -\alpha\bar{y}_1$，及び $\alpha\bar{y}_2 \neq 0$ より，$\alpha\bar{y} \in Y$．
しかしながら，$(-1,1), (-1,-1) \in Y$ について，

$$\frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{2}(-1,-1) = (-1,0) \notin Y$$

なので，Y は convex でない．
さらにもう一つ，以下のような生産可能集合 $Y' \subseteq \boldsymbol{R}^3$ を考える．

$$Y' := \left\{(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \in \boldsymbol{R}^3; \bar{y}_1 \leq 0, \bar{y}_2 \leq 0, \bar{y}_3 \leq \max\{-\bar{y}_1, -\bar{y}_2\}\right\}.$$

まず，Y' が non-increasing return to scale であることを示す．任意に $\bar{y}' \in Y'$，$\alpha' \in [0,1]$ をとると，$\bar{y}'_1 \leq 0$，$\bar{y}'_2 \leq 0$，及び $\bar{y}'_3 \leq \max\{-\bar{y}'_1, -\bar{y}'_2\}$ なので，$\alpha'\bar{y}'_1 \leq 0$，$\alpha'\bar{y}'_2 \leq 0$，さらには

$$\alpha'\bar{y}'_3 \leq \alpha' \max\{-\bar{y}'_1, -\bar{y}'_2\} = \max\{-\alpha'\bar{y}'_1, -\alpha'\bar{y}'_2\}$$

が成り立ち，$\alpha'\bar{y}' \in Y'$．
しかしながら，$(-1,0,1), (0,-1,1) \in Y'$ について，

$$\frac{1}{2}(-1,0,1) + \frac{1}{2}(0,-1,1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \notin Y'$$

なので，Y' は convex でない．

3. (a) $\bar{y} \in Y$，$\alpha \in [0,1]$ を任意にとる．すると，$f(0) = 0$ かつ f は concave function なので，$\alpha\bar{y}_1 \leq 0$，なおかつ

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= f(\alpha(-\bar{y}_1) + (1-\alpha)\cdot 0) \\ &\geq \alpha f(-\bar{y}_1) + (1-\alpha) f(0) \\ &= \alpha f(-\bar{y}_1) \\ &\geq \alpha\bar{y}_2 \end{aligned}$$

により，$\alpha\bar{y} \in Y$ が成り立つ．したがって，Y は non-increasing return to scale.

(b) 次のような f から導かれる Y を考える：

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2; \\ \dfrac{1}{2}x & \text{if } 2 \leq x. \end{cases}.$$

初めに Y が non-increasing return to scale であることを示す．$\bar{y} \in Y$，$\alpha \in [0,1]$ を任意にとる．

(i) $0 \leq -\bar{y}_1 < 1$ のとき，

$$\bar{y}_2 \leq f(-\bar{y}_1) = -\bar{y}_1$$

が成り立つ．$0 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 1$ なので，

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2 \end{aligned}$$

が成り立つから，$\alpha\bar{y} \in Y$．

(ii) $1 \leq -\bar{y}_1 < 2$ のとき，

$$\bar{y}_2 \leq f(-\bar{y}_1) = 1 \leq -\bar{y}_1$$

が成り立つ．$0 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 1$ ならば，

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2, \end{aligned}$$

また $1 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 2$ ならば，

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= 1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2 \end{aligned}$$

が成り立つから，$\alpha\bar{y} \in Y$．

(iii) $2 \leq -\bar{y}_1$ のとき，

$$\bar{y}_2 \leq f(-\bar{y}_1) = -\frac{1}{2}\bar{y}_1 \leq \bar{y}_1$$

が成り立つ．$0 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 1$ ならば，

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2, \end{aligned}$$

$1 \leq -\alpha\bar{y}_1 < 2$ ならば，

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= 1 \\ &> -\frac{1}{2}\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2, \end{aligned}$$

$2 \leq -\alpha\bar{y}_1$ ならば,

$$\begin{aligned} f(-\alpha\bar{y}_1) &= -\frac{1}{2}\alpha\bar{y}_1 \\ &\geq \alpha\bar{y}_2 \end{aligned}$$

が成り立つから，$\alpha\bar{y} \in Y$.

しかしながら，$f(1) = 1, f(4) = 2$ であるが,

$$f\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 4\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} < \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot f(1) + \frac{1}{2}\cdot f(4)$$

であるので，f は concave function ではない.

4. $w \in \boldsymbol{R}^{L-1}$，$q \in \boldsymbol{R}$，$\alpha \geq 0$ を任意にとる．$\hat{z} \in z(w, \alpha q)$ について，f の 1 次同次性から

$$\begin{aligned} f(\hat{z}) &\geq \alpha q, \\ \frac{1}{\alpha}f(\hat{z}) &\geq q, \\ f\left(\frac{1}{\alpha}\hat{z}\right) &\geq q, \end{aligned}$$

が成り立つ．また，$f(\bar{z}) \geq q$ なる任意の $\bar{z} \in \boldsymbol{R}_+^{L-1}$ に対し,

$$f(\alpha\bar{z}) = \alpha f(\bar{z}) \geq \alpha q$$

なので,

$$w \cdot (\alpha\bar{z}) \geq w \cdot \hat{z}$$

ゆえに

$$w \cdot \bar{z} \geq w \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\hat{z}\right).$$

したがって，$\dfrac{1}{\alpha}\hat{z} \in z(w, q)$ が成り立つので,

$$\hat{z} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\hat{z}\right) \in \alpha z(w, q)$$

を得る．よって $z(w, \alpha q) \subseteq \alpha z(w, q)$.

一方，$z(w, \alpha q) \supseteq \alpha z(w, q)$ については，上の結果において α を $\dfrac{1}{\alpha}$ に，q を αq に置き換えることにより成り立つ.

以上より,

$$z(w, \alpha q) = \alpha z(w, q)$$

が成り立つので，z は q に関する同次関数であり，その次数は 1 である.

さらに，任意の $w \in \boldsymbol{R}^{L-1}$，$q \in \boldsymbol{R}$，$\alpha \geq 0$ について，$\hat{z} \in z(w, \alpha q)$，$\hat{z}' \in z(w, q)$ とすると

$$\begin{aligned} c(w, \alpha q) &= w \cdot \hat{z} \\ &= w \cdot (\alpha \hat{z}') \\ &= \alpha (w \cdot \hat{z}') \\ &= \alpha c(w, q) \end{aligned}$$

が成り立つことから，c は q に関する同次関数であり，その次数は 1 である．