上級ミクロ経済学：解答４

川崎　雄二郎*

2009 年 5 月 22 日

1. $\alpha > 0, (p, \bar{u}) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}$ を任意にとる．仮定により，任意の $y \in h(p, \alpha\bar{u})$ に対し，

$$u\left(\alpha^{-\frac{1}{m}} y\right) = \alpha^{-1} u(y) \geq \alpha^{-1} \cdot \alpha\bar{u} = \bar{u}$$

が成り立つ．また，$u(x) \geq \bar{u}$ なる任意の $x \in \boldsymbol{R}^L_{++}$ について，

$$u\left(\alpha^{\frac{1}{m}} x\right) = \alpha u(x) \geq \alpha\bar{u}$$

が成り立つことから，

$$p \cdot \left(\alpha^{\frac{1}{m}} x\right) \geq p \cdot y.$$

ゆえに

$$p \cdot x \geq p \cdot \left(\alpha^{-\frac{1}{m}} y\right)$$

であるので，$\alpha^{-\frac{1}{m}} y \in h(p, \bar{u})$．したがって，$y = \alpha^{\frac{1}{m}} \left(\alpha^{-\frac{1}{m}} y\right) \in \alpha^{\frac{1}{m}} h(p, \bar{u})$ により $h(p, \alpha\bar{u}) \subseteq \alpha^{\frac{1}{m}} h(p, \bar{u})$ が成り立つ．

$h(p, \alpha\bar{u}) \supseteq \alpha^{\frac{1}{m}} h(p, \bar{u})$ の成立は，上での結果において α を $\frac{1}{\alpha} > 0$ に，また $\bar{u}$ を $\alpha\bar{u} \in \boldsymbol{R}$ に置き換えることで導出できる．

以上により，任意の $\alpha > 0$ 及び $(p, \bar{u}) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}$ について

$$h(p, \alpha\bar{u}) = \alpha^{\frac{1}{m}} h(p, \bar{u})$$

が成り立つので，Hicksian 需要対応 h は homogenous であり，次数は $\dfrac{1}{m}$ である．さらに，支出関数 e は任意の $\alpha > 0$ 及び $(p, \bar{u}) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}$ について

$$\begin{aligned} e(p, \alpha\bar{u}) &= p \cdot \left(\alpha^{\frac{1}{m}} y\right) \\ &= \alpha^{\frac{1}{m}} p \cdot y \\ &= \alpha^{\frac{1}{m}} e(p, \bar{u}) \end{aligned}$$

となる（ただし，$y \in h(p, \bar{u})$）ので，h と同じく次数 $\dfrac{1}{m}$ の同次関数となる．

---

* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程１年．質問は jiro_likes_1a2s3k@msn.com までメールください．

2. (a) まず初めに，任意の $p \in \boldsymbol{R}^L_{++}$ 及び $\bar{u}, \bar{u}' \in \boldsymbol{R}$ について，α を以下のように定める．

$$\alpha := \frac{e(p, \bar{u}') - e(p, \bar{u})}{p_1}.$$

双対性の結果が成り立つものと仮定すると，

$$h(p, \bar{u}) = x(p, e(p, \bar{u})),$$
$$h(p, \bar{u}') = x(p, e(p, \bar{u}'))$$

が成り立つ．宿題 3 の問題 1 の結果から，任意の $p \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$w \in \boldsymbol{R}$ 及び $\alpha \in \boldsymbol{R}$ について

$$x(p, w + \alpha) = x(p, w) + \left\{\left(\frac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right)\right\}$$

が成り立つことから，

$$\begin{aligned} h(p, \bar{u}') &= x(p, e(p, \bar{u}')) \\ &= x(p, e(p, \bar{u}) + (e(p, \bar{u}') - e(p, \bar{u}))) \\ &= x(p, e(p, \bar{u})) + \left\{\left(\frac{e(p, \bar{u}') - e(p, \bar{u})}{p_1}, 0, \cdots, 0\right)\right\} \\ &= h(p, \bar{u}) + \{(\alpha, 0, \cdots, 0)\} \end{aligned}$$

を得る．

(b) (a) の結果及び宿題 3 の問題 1 の結果から，任意の $l = 2, 3, \cdots, L$，$p \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$w, w', \bar{u}, \bar{u}' \in \boldsymbol{R}$ について

$$h_l(p, \bar{u}) = h_l(p, \bar{u}');$$
$$x_l(p, w) = x_l(p, w')$$

が成り立つので，双対性の結果を用いれば，任意の $l = 2, 3, \cdots, L$，$p \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$w, \bar{u} \in \boldsymbol{R}$ について

$$\begin{aligned} h_l(p, \bar{u}) &= x_l(p, e(p, \bar{u})) \\ &= x_l(p, w) \end{aligned}$$

が成り立つ．

3. 初めに前半部分の証明を行う．任意の $(p, w) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}_{++}$ に対して

$$p \cdot x(\bar{p}, \bar{w}) \leq w$$

ならば

$$v(p, w) \geq v(\bar{p}, \bar{w})$$

が成り立つことにより直ちに得られる．

続いて Roy's identity を導出する．Lagrangian を用いると，１階の必要条件は以下の通り：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial p_l}\left(\bar{p},\bar{w}\right)+\lambda x_l\left(\bar{p},\bar{w}\right)=0,\forall l=1,2,\cdots,L; \\ \dfrac{\partial v}{\partial w}\left(\bar{p},\bar{w}\right)-\lambda=0; \\ \bar{w}-\bar{p}\cdot x\left(\bar{p},\bar{w}\right)=0. \end{cases}$$

これにより $\lambda=\dfrac{\partial v}{\partial w}\left(\bar{p},\bar{w}\right)\neq 0$ なので，任意の $l=1,2,\cdots,L$ について

$$\frac{\partial v}{\partial p_l}\left(\bar{p},\bar{w}\right)+\frac{\partial v}{\partial w}\left(\bar{p},\bar{w}\right)x_l\left(\bar{p},\bar{w}\right)=0.$$

ゆえに

$$x_l\left(\bar{p},\bar{w}\right)=-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_l}\left(\bar{p},\bar{w}\right)}{\dfrac{\partial v}{\partial w}\left(\bar{p},\bar{w}\right)}$$

が成り立つ．

4. まず初めに，任意の $p\in\boldsymbol{R}^L_{++}$，$w\in\boldsymbol{R}$，$\bar{u}\in\boldsymbol{R}$ について以下を示す．

$$\begin{aligned} &h\left(p,v\left(p,w\right)\right)=x\left(p,w\right), \\ &x\left(p,e\left(p,\bar{u}\right)\right)=h\left(p,\bar{u}\right), \\ &e\left(p,v\left(p,w\right)\right)=w. \end{aligned}$$

前半の２式は，問２の (b) において求めた

$$\begin{aligned} h\left(p,v\left(p,w\right)\right)&\subseteq x\left(p,w\right), \\ x\left(p,e\left(p,\bar{u}\right)\right)&\subseteq h\left(p,\bar{u}\right) \end{aligned}$$

が本問の仮定の下でも成り立つことと，x_1 及び h_1 が関数であることから成り立つ．さらに最後の式は，local nonsatiation により Walras' law が成り立つので，

$$p\cdot x\left(p,w\right)=w.$$

上で求めた式により，

$$e\left(p,v\left(p,w\right)\right)=p\cdot x\left(p,w\right)=w$$

を得る．

次に，$v\left(p^1,w\right)>v\left(p^0,w\right)$ を示す．仮定により，

$$\begin{aligned} &p^1\cdot x\left(p^0,w\right) \\ &\leq p^0\cdot x\left(p^0,w\right) \\ &\leq w \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$v\left(p^1,w\right)\geq v\left(p^0,w\right).$$

ここで仮に $v\left(p^1,w\right)=v\left(p^0,w\right)$ とすると，$p^1\cdot x\left(p^0,w\right)\leq w$ であることと x が関数であることから

$$x\left(p^1,w\right)=x\left(p^0,w\right)$$

が成り立つ．Walras' law が成り立つので，

$$p^1\cdot x\left(p^1,w\right)=w$$

である一方，

$$\begin{aligned}&p^1\cdot x\left(p^0,w\right)\\&=\left[p^1-p^0\right]\cdot x\left(p^0,w\right)+p^0\cdot x\left(p^0,w\right)\\&=\left(p_1^1-p_1^0\right)x_1\left(p^0,w\right)+w\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}0&=p^1\cdot\left[x\left(p^1,w\right)-x\left(p^0,w\right)\right]\\&=\left(p_1^0-p_1^1\right)x_1\left(p^0,w\right).\end{aligned}$$

$p_1^0-p_1^1>0$ であるから，$x_1\left(p^0,w\right)=x_1\left(p^1,w\right)=0$．このとき，$w'<w$ なる $w'\in\boldsymbol{R}$ に対して $x_1\left(p^0,w'\right)$ 及び $x_1\left(p^1,w'\right)$ が 0 よりも厳密に小さい値をとることができないので，第 1 財が normal good であることに反する．
$u^1=v\left(p^1,w\right),u^0=v\left(p^0,w\right)$ とすると，$EV\left(p^0,p^1,w\right)$ 及び $CV\left(p^0,p^1,w\right)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}EV\left(p^0,p^1,w\right)&=e\left(p^0,u^1\right)-e\left(p^0,u^0\right),\\CV\left(p^0,p^1,w\right)&=e\left(p^1,u^1\right)-e\left(p^1,u^0\right)\end{aligned}$$

と表せる．任意の $(p,\bar{u})$ において，$e(p,\bar{u})$ が p_1 に関して偏微分可能であり，かつその偏微分が p_1 において積分可能であるとすると，

$$\begin{aligned}&EV\left(p^0,p^1,w\right)-CV\left(p^0,p^1,w\right)\\&=\left[e\left(p^0,u^1\right)-e\left(p^0,u^0\right)\right]-\left[e\left(p^1,u^1\right)-e\left(p^1,u^0\right)\right]\\&=\left[e\left(p^0,u^1\right)-e\left(p^1,u^1\right)\right]-\left[e\left(p^0,u^0\right)-e\left(p^1,u^0\right)\right]\\&=\int_{p_1^1}^{p_1^0}\frac{\partial e}{\partial p_1}\left(\hat{p}_1,p_{-1}^0,u^1\right)d\hat{p}_1-\int_{p_1^1}^{p_1^0}\frac{\partial e}{\partial p_1}\left(\hat{p}_1,p_{-1}^0,u^0\right)d\hat{p}_1\\&=\int_{p_1^1}^{p_1^0}h_1\left(\hat{p}_1,p_{-1}^0,u^1\right)d\hat{p}_1-\int_{p_1^1}^{p_1^0}h_1\left(\hat{p}_1,p_{-1}^0,u^0\right)d\hat{p}_1\\&=\int_{p_1^1}^{p_1^0}\left[h_1\left(\hat{p}_1,p_{-1}^0,u^1\right)-h_1\left(\hat{p}_1,p_{-1}^0,u^0\right)\right]d\hat{p}_1\end{aligned}$$

となる．ここで，u を連続関数であると仮定すると，任意の $p\in\boldsymbol{R}_{++}^L$，及び $\bar{u}>\bar{u}'\geq u\left(0\right)$

なる $\bar{u}, \bar{u}' \in \boldsymbol{R}$ において,

$$
\begin{aligned}
& h_1(p, \bar{u}) \\
& = x_1(p, e(p, \bar{u})) \\
& > x_1(p, e(p, \bar{u}')) \\
& = h_1(p, \bar{u}')
\end{aligned}
$$

により，$h_1(p, \bar{u}) - h_1(p, \bar{u}') > 0$ が成り立つので，$u^1 > u^0$ であることから

$$EV\left(p^0, p^1, w\right) - CV\left(p^0, p^1, w\right) > 0,$$

つまり

$$EV\left(p^0, p^1, w\right) > CV\left(p^0, p^1, w\right)$$

が成り立つ.