# 上級ミクロ経済学： 宿題 4

京都大学経済研究所 原 千秋

平成 21 年 5 月 13 日

**注意**

明示的に証明を求めない設問に対しては，解答の内容に応じて証明・反例・値等を与えること．

1. $\boldsymbol{R}^L_{++}$ 上で定義された効用関数 $u$ が同次関数（つまり，ある $m$ が存在して，任意の $x \in \boldsymbol{R}^L_{++}$ と $\alpha > 0$ に対し，$u(\alpha x) = \alpha^m u(x)$ が成立）ならば，$u$ から導出される Hicksian 需要対応 $h$ と支出関数 $e$ は効用水準 $\bar{u}$ の同次関数であることを証明せよ．さらに，その場合の次数を求めよ．

2. $\succsim$ を，$X = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{L-1}_{+}$ 上の，第 1 財に関して準線形（quasi-linear）な選好関係とする．この選好関係を表す効用関数（のひとつ）を $u$ とする．$u$ から導出される Hicksian 需要対応を $h$ で表す．

   (a) 任意の $p \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$\bar{u} \in \boldsymbol{R}$，$\bar{u}' \in \boldsymbol{R}$ に対し，
   $$h(p, \bar{u}') = h(p, \bar{u}) + \{(\alpha, 0, \dots, 0)\}$$
   を満たす $\alpha \in \boldsymbol{R}$ が存在することを証明せよ．

   (b) $\succsim$ から導出される（Marshallian, Walrasian）需要対応を $x$ で表す．任意の $\ell = 2, 3, \dots, L$，$p \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$\bar{u} \in \boldsymbol{R}$，$w \in \boldsymbol{R}$ に対し，
   $$h_\ell(p, \bar{u}) = x_\ell(p, w)$$
   （ただしここで $h_\ell(p, \bar{u})$ は $h(p, \bar{u})$ の第 $\ell$ 成分，$x_\ell(p, w)$ は $x(p, w)$ の第 $\ell$ 成分を表す）が成立することを証明せよ．

3. 任意の間接効用関数 $v$ と任意の価格ベクトルと富水準の組 $(\bar{p}, \bar{w}) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}_{++}$ に対し，$(\bar{p}, \bar{w})$ が，制約条件付最小化問題
   $$\begin{aligned} \min_{(p,w)} \quad & v(p, w), \\ \text{subject to} \quad & p \cdot x(\bar{p}, \bar{w}) \leq w. \end{aligned}$$
   の解であることを証明せよ．また，解であることの 1 階の必要条件から Roy の恒等式を導出せよ．

4. 選好関係 $\succsim$ に関して第 1 財は正常財（normal good）であるとする．(つまり，$\succsim$ から導出される第 1 財への（Marshallian, Walrasian）需要関数を $x_1$ とすると，任意の $p \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$w \geq 0$，$w' \geq 0$ に対し，$w' > w$ ならば $x_1(p, w') > x_1(p, w)$.）このとき，任意の $p^0 \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$p^1 \in \boldsymbol{R}^L_{++}$，$w \geq 0$ に対し，$p^0_1 > p^1_1, p^0_2 = p^1_2, \dots, p^0_L = p^1_L$ ならば，$CV(p^0, p^1, w) > EV(p^0, p^1, w)$ が成り立つことを証明せよ．