上級ミクロ経済学：解答 3

川崎　雄二郎*

2009 年 5 月 11 日

1. 任意の $(p,w) \in \boldsymbol{R}^L_{++} \times \boldsymbol{R}$ に対し，(Marshallian, Walrasian) 需要対応 $x(p,w)$ は次を満たす：任意の $\hat{x} \in x(p,w)$ に対し，

$$p \cdot \hat{x} \leq w,$$

かつ $p \cdot z \leq w$ なる任意の $z \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{L-1}_{+}$ について

$$\hat{x} \succsim z.$$

$\alpha \in \boldsymbol{R}$ を任意にとる．$p \cdot y \leq w + \alpha$ なる全ての $y \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{L-1}_{+}$ に対し，$y_\alpha := y - \left(\dfrac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right)$ と定義する．このとき，$p \cdot y_\alpha = p \cdot y - \alpha \leq w$ より，全ての $\hat{x} \in x(p,w)$ について

$$x \succsim y_\alpha$$

であるから，quasi-linearity により，

$$\hat{x} + \left(\frac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right) \succsim y_\alpha + \left(\frac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right) = y$$

成り立つ．したがって，任意の $\hat{x} \in x(p,w)$ に対し

$$\hat{x} + \left(\frac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right) \in x(p, w+\alpha).$$

ここで得られる結果は厳密には $x(p,w) + \left\{\left(\dfrac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right)\right\} \subseteq x(p, w+\alpha)$ までであるが，一方で $\beta = -\alpha \in \boldsymbol{R}$ 及び $w' = w + \alpha \in \boldsymbol{R}$ に対して，上と同じ議論を行うことにより $x(p,w') + \left\{\left(\dfrac{\beta}{p_1}, 0, \cdots, 0\right)\right\} \subseteq x(p, w'+\beta)$，ゆえに $x(p, w+\alpha) \subseteq x(p,w) + \left\{\left(\dfrac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right)\right\}$ も求められるので，$x(p,w) + \left\{\left(\dfrac{\alpha}{p_1}, 0, \cdots, 0\right)\right\} = x(p, w+\alpha)$ が成り立つ．

* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程 1 年．質問は jiro_likes_1a2s3k@msn.com までメールください．

2. (a) 結果のみ示す．ここで，$(p,\bar{u}) \in \boldsymbol{R}^2_{++} \times \boldsymbol{R}$ における Hicksian 需要対応，支出関数をそれぞれ $h(p,\bar{u})$，$e(p,\bar{u})$ とする．

$$
\begin{aligned}
&p_1 < p_2 \text{のとき，} \left\{ \begin{array}{l} h(p,\bar{u}) = \{(\bar{u},0)\}, \\ e(p,\bar{u}) = p_1\bar{u} \end{array} \right\}; \\
&p_1 = p_2 \text{のとき，} \left\{ \begin{array}{l} h(p,\bar{u}) = \left\{(x_1,x_2) \in \boldsymbol{R}^2_+ ; x_1 + x_2 = \bar{u}\right\}, \\ e(p,\bar{u}) = p_1\bar{u}\,(= p_2\bar{u}) \end{array} \right\}; \\
&p_1 > p_2 \text{のとき，} \left\{ \begin{array}{l} h(p,\bar{u}) = \{(0,\bar{u})\}, \\ e(p,\bar{u}) = p_2\bar{u} \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

(b) 初めに，$p_1 \neq p_2$ ならば，$(p,\bar{u})$ の近傍において $e(p,\bar{u})$ は $p_1\bar{u}$ または $p_2\bar{u}$ のどちらか一方に定まることから，微分可能．

次に，$p_1 = p_2$ なる任意の $(p,\bar{u}) \in \boldsymbol{R}^2_{++} \times \boldsymbol{R}$ において微分可能でないことを示す．$\bar{p} = p_1 = p_2$ としよう．たとえば $(1,0,0)$ の方向について，十分小さい $\varepsilon > 0$ においては $p_1 + \varepsilon > p_2$，また絶対値の十分小さい $\varepsilon < 0$ において $p_1 + \varepsilon < p_2$ が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{e(\bar{p}+\varepsilon,\bar{p},\bar{u}) - e(\bar{p},\bar{p},\bar{u})}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\bar{p}\bar{u} - \bar{p}\bar{u}}{\varepsilon} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

であるが，一方で

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \nearrow 0} \frac{e(\bar{p}+\varepsilon,\bar{p},\bar{u}) - e(\bar{p},\bar{p},\bar{u})}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \nearrow 0} \frac{(\bar{p}+\varepsilon)\,\bar{u} - \bar{p}\bar{u}}{\varepsilon} \\
&= \bar{u}
\end{aligned}
$$

であるので，微分可能でない．

以上より，$p_1 = p_2$ を満たす任意の $(p,\bar{u}) \in \boldsymbol{R}^2_{++} \times \boldsymbol{R}$ において，かつそのときのみ，$e(p,\bar{u})$ は微分可能でない．

(c) (b) により，$p_1^* = p_2^*$ が成り立つ．そこで $\bar{p}^* = p_1^* = p_2^*$ とすると，与えられた式は以下のように書き換えられる．

$$
q_1(p_1 - \bar{p}^*) + q_2(p_2 - \bar{p}^*) \geq \bar{u} \min\{p_1 - \bar{p}^*, p_2 - \bar{p}^*\}.
$$

これより，$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ かつ $q_1 + q_2 = \bar{u}$ を満たすように $q \in \boldsymbol{R}^2$ を選べば，かつそのときに限り，任意の $p \in \boldsymbol{R}^2_{++}$ に対して与えられた式が成り立つことを示す．

まず，$q_1 < 0$ ならば，$p_1 - \bar{p}^* > 0, p_2 - \bar{p}^* = 0$ のときに

$$
\begin{aligned}
q_1(p_1 - \bar{p}^*) + q_2(p_2 - \bar{p}^*) &= q_1(p_1 - \bar{p}^*) \\
&< 0 \\
&= \bar{u} \min\{p_1 - \bar{p}^*, p_2 - \bar{p}^*\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$q_2 < 0$ の場合についても同様．さらに，$q_1 + q_2 > \bar{u}$ ならば $p_1 - \bar{p}^* = p_2 - \bar{p}^* < 0$ のときに

$$\begin{aligned} q_1 (p_1 - \bar{p}^*) + q_2 (p_2 - \bar{p}^*) &< (q_1 + q_2)(p_1 - \bar{p}^*) \\ &< \bar{u}(p_1 - \bar{p}^*) \\ &= \bar{u} \min \{p_1 - \bar{p}^*, p_2 - \bar{p}^*\} \end{aligned}$$

が成り立つ一方，$q_1 + q_2 < \bar{u}$ ならば $p_1 - \bar{p}^* = p_2 - \bar{p}^* > 0$ のときに

$$\begin{aligned} q_1 (p_1 - \bar{p}^*) + q_2 (p_2 - \bar{p}^*) &= (q_1 + q_2)(p_1 - \bar{p}^*) \\ &< \bar{u}(p_1 - \bar{p}^*) \\ &= \bar{u} \min \{p_1 - \bar{p}^*, p_2 - \bar{p}^*\} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，与えられた不等式が成立するためには，$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ かつ $q_1 + q_2 = \bar{u}$ が必要である．

最後に，$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ かつ $q_1 + q_2 = \bar{u}$ ならば，任意の $p \in \boldsymbol{R}^2_{++}$ に対し

$$\begin{aligned} q_1 (p_1 - \bar{p}^*) + q_2 (p_2 - \bar{p}^*) &\geq (q_1 + q_2) \min \{p_1 - \bar{p}^*, p_2 - \bar{p}^*\} \\ &= \bar{u} \min \{p_1 - \bar{p}^*, p_2 - \bar{p}^*\} \end{aligned}$$

が成り立つ．

このような $q \in \boldsymbol{R}^2$ の集合は，$h(p^*, \bar{u})$ に一致している．

3.（a）以下のような utility function を考える．

$$u(x) = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{if } x_1 x_2 \leq 2 \\ 2 & \text{if } 2 < x_1 x_2 \leq 4 \\ \frac{1}{2} x_1 x_2 & \text{if } x_1 x_2 > 4 \end{cases} .$$

このとき，u は continuous かつ (strictly) quasi-concave である．

$(p_1, p_2) = (1, 1), w = 3$ のとき，(Marshallian, Warlasian) 需要対応 $x(p, w)$ は

$$x(p, w) = \left\{ (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2_+ ; x_1 + x_2 \leq 3 \text{ かつ } x_1 x_2 \geq 2 \right\}$$

であるので，$v(p, w) = 2$．すると，

$$h(p, v(p, w)) = \left\{ \left(\sqrt{2}, \sqrt{2} \right) \right\} \neq x(p, w)$$

及び

$$e(p, v(p, w)) = 2\sqrt{2} \neq w$$

が成り立つ．

（b）utility function は以下のように定める[*1]．

$$u(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{if } x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2 & \text{if } x_1 + x_2 > 2 \end{cases} .$$

[*1] この問いにおける u の選定に関して，グラフに kink がある（微分可能でない x が存在する）ことが実質的には重要でないことをここであえて述べておく．このような形状の関数にしたのは，$x(p, e(p, \bar{u}))$ や $v(p, e(p, \bar{u}))$ の表記を容易にするためである．

このとき，u は continuous かつ quasi-concave である．
$(p_1, p_2) = (1, 0), \bar{u} = 1$ のとき，Hicksian 需要対応 $h(p, \bar{u})$ は

$$h(p, \bar{u}) = \left\{(0, x_2) \in \boldsymbol{R}_+^2 ; x_2 \geq 1\right\}$$

であるので，$e(p, \bar{u}) = 0$．すると，

$$x(p, e(p, \bar{u})) = \left\{(0, x_2) \in \boldsymbol{R}_+^2 ; x_2 \geq 2\right\} \neq h(p, \bar{u})$$

及び

$$v(p, e(p, \bar{u})) = 2 \neq \bar{u}$$

が成り立つ．