

上級ミクロ経済学：解答 2

川崎 雄二郎*

2009年4月28日

1. まず continuity を用いて以下を示す .

$$\forall x, y \in X = \mathbb{R}_+^L; [y - x \in \mathbb{R}_+^L \implies y \succsim x].$$

これに対し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $x^n = x, y^n = y + \frac{1}{n}e$ となる 2 つのベクトル列 $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}, (y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える . ここで, $e \in \mathbb{R}_+^L$ は単位ベクトル (つまり $e_l = 1, \forall l = 1, \dots, L$) とする . すると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $y^n - x^n \in \mathbb{R}_+^L$ により monotonicity から $y^n \succ x^n$ なので, $y^n \succsim x^n$ を得る . $y^n \rightarrow y$ なので, continuity から $y \succsim x$ が成り立つ . 次に $y - x \in \mathbb{R}_+^L \setminus \{0\}$ を満たす $x, y \in X = \mathbb{R}_+^L$ を任意にとる . 上の議論から以下が成り立つ .

$$\begin{cases} x \succsim x; \\ x + 2(y - x) \succsim x. \end{cases}$$

これと strict convexity により,

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x + 2(y - x)) \succ x$$

が成り立つ .

2. $u(x) \geq u(z), u(y) \geq u(z)$ を満たす $x, y, z \in \mathbb{R}_+^2$ を任意にとる .

- (i) $0 < \alpha < 1$ のときには convexity を決して満たさないことを示す .

$x = z = (2, 0), y = (0, 2)$ とする . このとき, $u(x) = -2^\alpha = u(y)$ が成り立っていることに注意 . すると, x と y の凸結合の 1 つである $w := \frac{x+y}{2} = (1, 1)$ について,

$$u(w) = -1 - 1 = -2 < -2^\alpha$$

となり, convexity は満たされない .

- (ii) $\alpha \geq 1$ のときに convexity を満たすことを示す .

$u(x) \geq u(z), u(y) \geq u(z)$ を満たす $x, y, z \in \mathbb{R}_+^2$ を任意にとる . 任意の $t \in [0, 1]$ に

* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程 1 年 . 質問は jiro_likes_1a2s3k@msn.com までメールください .

ついて

$$\begin{aligned}
 u(tx + (1-t)y) &= -(tx_1 + (1-t)y_1)^\alpha - (tx_2 + (1-t)y_2)^\alpha \\
 &\geq -tx_1^\alpha - (1-t)y_1^\alpha - tx_2^\alpha - (1-t)y_2^\alpha \\
 &= tu(x) + (1-t)u(y) \\
 &\geq tu(z) + (1-t)u(z) = u(z)
 \end{aligned}$$

が成り立つ*1ので, convexity は満たされる.

以上より, $\alpha \geq 1$ のときに u が表す \mathbb{R}_+^2 上の選好関係は convexity を満たす.

3. $X = \mathbb{R}_+^L$ とし, $p \in \mathbb{R}_{++}^L$ を価格ベクトル, $w \in \mathbb{R}_+$ を富水準とおく.

(a) 辞書的順序とは, 以下のように定められる順序 \succsim のことを指す.

$$\forall x, y \in X = \mathbb{R}_+^L;$$

$$x \succsim y \stackrel{def}{\iff} \exists l' \geq 2 \text{ s.t. } \begin{cases} x_k = y_k, k = 1, \dots, l' - 1; \\ x_{l'} > y_{l'}; \\ \forall l = 2, \dots, L; x_l = y_l. \end{cases} ; \text{ or}$$

このとき, $p \cdot z \leq w$ を満たす任意の $z \in \mathbb{R}_+^L$ について, $\left(\frac{w}{p_1}, 0, \dots, 0\right) \succsim z$ となることを示す. 辞書的順序は complete であるので, 仮に $p \cdot z' \leq w$ かつ $z' \succ \left(\frac{w}{p_1}, 0, \dots, 0\right)$ なる $z' \in \mathbb{R}_+^L$ が存在するとすると,

$$\begin{aligned}
 z'_1 &> \frac{w}{p_1}; \text{ or} \\
 \exists l' \geq 2 \text{ s.t. } z'_1 &= \frac{w}{p_1}, x_k = 0, \forall k = 2, \dots, l' - 1 \text{ and } x_{l'} > 0.
 \end{aligned}$$

どちらにせよ, $p \cdot z' > w$ が成り立つので, 矛盾. ゆえに, Walrasian demand function $x(p, w)$ は,

$$x(p, w) = \left(\frac{w}{p_1}, 0, \dots, 0\right)$$

である.

(b) 以下のように定義される選好関係 \succsim を考える.

$$\forall x, y \in X = \mathbb{R}_+^L; x \succsim y \stackrel{def}{\iff} x_1 \geq y_1.$$

この選好を表す効用関数の一つとして, $u(x_1) = x_1$ を用いる. すると, Walrasian demand function $x(p, w)$ は以下の最大化問題の解である.

$$\begin{aligned}
 \max_{x \in \mathbb{R}_+^L} u(x) &= x_1 \\
 \text{s.t. } p \cdot x &\leq w.
 \end{aligned}$$

したがって $x(p, w) = \left(\frac{w}{p_1}, 0, \dots, 0\right)$ であり, (a) で求めたものと一致する.

*1 $f(x) = x^\alpha$ が凸関数であることを用いよ.

最後にこの選好関係 \succsim が completeness, transitivity, continuity, convexity, monotonicity のすべてを満たすことを示す.

(completeness, transitivity, continuity) u が continuous であるから従う.

(convexity) u が linear, したがって concave であることから従う.

(monotonicity) $y - x \in \mathbb{R}_{++}^L$ なる $x, y \in X = \mathbb{R}_+^L$ を任意にとる. このとき, $y_1 > x_1$ なので, $y_1 \geq x_1$ であるが $y_1 \leq x_1$ ではない. ゆえに $y \succsim x$ であるが $x \succsim y$ ではないので, $y \succ x$.

4. 問題の仮定より,

$$u(x) = x_1^\alpha + \left(\frac{x_2^\beta + x_3^\beta}{2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

と表せる.

(a) 計算結果のみ示す.

$$\nabla u(x) = \left(\alpha x_1^{\alpha-1}, \frac{\alpha}{2} x_2^{\beta-1} \left(\frac{x_2^\beta + x_3^\beta}{2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}, \frac{\alpha}{2} x_3^{\beta-1} \left(\frac{x_2^\beta + x_3^\beta}{2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \right).$$

(b) $u(x) = u(y)$ なる $x, y \in \mathbb{R}_+^3$ を任意にとる. 任意の $t \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} u(tx) &= (tx_1)^\alpha + \left(\frac{(tx_2)^\beta + (tx_3)^\beta}{2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ &= t^\alpha x_1^\alpha + \left(\frac{t^\beta (x_2^\beta + x_3^\beta)}{2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ &= t^\alpha \left(x_1^\alpha + \left(\frac{x_2^\beta + x_3^\beta}{2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \\ &= t^\alpha u(x). \end{aligned}$$

同様にして

$$u(ty) = t^\alpha u(y)$$

である. したがって $u(tx) = u(ty)$ より, homotheticity が満たされる.

5. $\nabla u(x) = (x_1^{-\alpha}, x_2^{-2\alpha})$ であるので, 需要関数 $x(p, w)$ は最大化問題の 1 階条件により $x_1(p, w), x_2(p, w) > 0$ かつ

$$\frac{(x_1(p, w))^{-\alpha}}{(x_2(p, w))^{-2\alpha}} = \frac{p_1}{p_2}$$

を満たし*2 ,

$$x_1(p, w) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (x_2(p, w))^2 \quad (1)$$

となる . さらに budget constraint は bind するので ,

$$p_1 x_1(p, w) + p_2 x_2(p, w) = w . \quad (2)$$

(1),(2) の両辺を w で偏微分すると ,

$$\frac{\partial x_1(p, w)}{\partial w} = 2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x_2(p, w) \frac{\partial x_2(p, w)}{\partial w} , \quad (3)$$

$$p_1 \frac{\partial x_1(p, w)}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_2(p, w)}{\partial w} = 1 \quad (4)$$

が成り立つ . (3) により ,

$$\begin{aligned} \frac{w}{x_1(p, w)} \frac{\partial x_1(p, w)}{\partial w} &= 2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x_2(p, w) \frac{w}{x_1(p, w)} \frac{\partial x_2(p, w)}{\partial w} \\ &= 2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{(x_2(p, w))^2}{x_1(p, w)} \frac{w}{x_2(p, w)} \frac{\partial x_2(p, w)}{\partial w} , \end{aligned}$$

(1) を用いると

$$\frac{w}{x_1(p, w)} \frac{\partial x_1(p, w)}{\partial w} = 2 \frac{w}{x_2(p, w)} \frac{\partial x_2(p, w)}{\partial w} \quad (5)$$

が示される .

ここで第 1 財及び第 2 財の需要の所得弾力性を $e_1(p, w), e_2(p, w)$ とすると ,

$$e_1(p, w) = 2e_2(p, w) \quad (6)$$

となり , e_1, e_2 は同符号であることが分かる . さらに , (4) により

$$p_1 \frac{x_1(p, w)}{w} e_1(p, w) + p_2 \frac{x_2(p, w)}{w} e_2(p, w) = 1$$

が成り立ち , これは $p_1 \frac{x_1(p, w)}{w} + p_2 \frac{x_2(p, w)}{w} = 1$ から $e_1(p, w), e_2(p, w)$ をそれぞれ $p_1 \frac{x_1(p, w)}{w}, p_2 \frac{x_2(p, w)}{w}$ で重みつけた加重平均が 1 ということの意味する式である解釈でき

*2 Lagrange 乗数 λ を用いて最大化問題の 1 階条件を表すと ,

$$\begin{aligned} x_1^{-\alpha} - \lambda p_1 &= 0 \\ x_2^{-2\alpha} - \lambda p_2 &= 0 \\ \lambda &> 0 \end{aligned}$$

である .

る．この式と (6) により $e_1(p, w) > 0$, $e_2(p, w) > 0$, したがって $e_1(p, w) > e_2(p, w)$ が分かる*3ので , $p_1 \frac{x_1(p, w)}{w} > 0$, $p_2 \frac{x_2(p, w)}{w} > 0$ により ,

$$e_1(p, w) > 1 > e_2(p, w)$$

が成り立つ .

(別解) (2) に (1) を与えて整理することで 2 次方程式

$$p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}} x_2^2 + p_2 x_2 - w = 0$$

が成り立つ . $x_2(p, w) \in \mathbb{R}_+$ であることに注意してこれを解くと ,

$$\begin{aligned} x_2(p, w) &= \frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}} w}}{2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w}}{2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-1}} , \end{aligned}$$

また (1) により

$$\begin{aligned} x_1(p, w) &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w}}{2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right)^2 \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w} + (1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w)}{4p_1^{2-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2}} \\ &= \frac{1 + 2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w - \sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w}}{2p_1^{2-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2}} \end{aligned}$$

である .

したがって第 1 財の需要の所得弾力性について ,

$$\begin{aligned} \frac{w}{x_1(p, w)} \frac{\partial x_1(p, w)}{\partial w} &= \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w} - (1 + 2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w)} \\ &= \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w} - 1 \right)^2} > 1 \end{aligned}$$

*3 $e_1(p, w)$, $e_2(p, w)$ がともに負ならば , (6) によれば $e_1(p, w) < e_2(p, w)$ が成り立ってしまうことに注意 .

が成り立ち (ただし $\kappa_1 = 2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} \left(\sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w} - 1 \right)$), さらに第2財の需要の所得弾力性について,

$$\begin{aligned} & \frac{w}{x_2(p, w)} \frac{\partial x_2(p, w)}{\partial w} \\ &= \frac{\kappa_2}{\kappa_2 + \left(1 + 2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w\right) - \sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w}} \\ &= \frac{\kappa_2}{\kappa_2 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w} - 1 \right)^2} < 1 \end{aligned}$$

が成り立つ (ただし $\kappa_2 = 2p_1^{1-\frac{1}{\alpha}} p_2^{\frac{1}{\alpha}-2} w$).