上級ミクロ経済学：宿題１の解答

川崎 雄二郎

2009 年 4 月 17 日

1. （a） xRy, yRz を満たす $x, y, z \in X$ を任意にとる．すると，asymmetry から $yR^c x$．仮に xRz が成り立たないとすると，$xR^c z$ により R^c の transitivity から $yR^c z$ であるので，yRz に矛盾．したがって，xRz．

   (別解) まず初めに，negative transitivity と以下の条件が同値であることを示す．

   $$\forall x, z \in X;\ [xRz \Longrightarrow xRy \text{ or } yRz,\ \forall y \in X].$$

   実際，negative transitivity の条件

   $$\forall x, y, z \in X;\ [xR^c y \text{ and } yR^c z \Longrightarrow xR^c z]$$

   の対偶を取ることにより得られる．

   xRy, yRz を満たす $x, y, z \in X$ を任意にとる．すると上述の結果から，xRz または zRy いずれかが成り立つ．しかしながら，asymmetry により $zR^c y$ なので，xRz を得る．

   （b） ある $N \in \mathbb{N}$ 及び $(x_1, \cdots, x_N) \in X^N$ について，$x_n R x_{n+1}, 1 \leq n \leq N-1$ かつ $x_N R x_1$ が成り立っているとしよう．すると，transitivity を繰り返し利用することにより，$x_1 R x_N$ が成り立つ．よって，$x_N R x_1$ かつ $x_1 R x_N$ から $x_N R x_N$（さらには $x_1 R x_1$）を得る．これは irreflexivity に矛盾．

2. $(R^c)^c = R$ が成り立つことを示せば容易に示すことができる．

   実際，２項関係 R の定義から，任意の $x, y \in X$ について xRy あるいは $xR^c y$ のどちらか一方のみが成立するので，

   $$xRy \Longleftrightarrow \text{not } xR^c y \Longleftrightarrow x\,(R^c)^c\,y$$

   が言える．以上の議論により，R^c の negative transitivity は，すなわち R の transitivity と同値であることが分かる．

   次に R の completeness と R^c の asymmetry の同値性を示す．

   （R の completeness$\Longrightarrow$ R^c の asymmetry） $xR^c y$ を満たす $x, y \in X$ を任意にとる．completeness により yRx．

   （R の completeness$\Longleftarrow$ R^c の asymmetry） 任意の $x, y \in X$ について，xRy または $xR^c y$ のどちらかが成り立ち，さらに $xR^c y$ のときには asymmetry により yRx．

3. 一つの例として $x = (1,0,0), y = (0,1,0), z = (0,1,1)$ の場合を考えよ．x と y に関しては第１成分，第３成分について $\geq$ が成り立つので xRy であり，他方 y と z に関しては第１成分，第２成分について $\geq$ が成り立つので yRz である．しかしながら，x と z に関しては第１成分について $\geq$ が成り立つものの，他の成分では成り立たない．ゆえに R は推移的でない．

4. $x \sim y, y \succ z$ により，定義から以下が言える．

$$x \succsim y, y \succsim x, y \succsim z, \text{ but not } z \succsim y.$$

$x \succsim y$ かつ $y \succsim z$ により $x \succsim z$ が成り立つので，あとは $z \succsim x$ でないことを示せば十分．仮に $z \succsim x$ とすると transitivity により $z \succsim y$ を得，矛盾が生じる．
また，$\succsim$ の transitivity の代わりに $\succ$ 及び $\sim$ の transitivity を仮定しても，$x \sim y, y \succ z$ を満たす任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \succ z$ は必ずしも成り立たない．たとえば以下のような X と $\succsim \subseteq X \times X$ の組を考える．

$$\begin{cases} X := \{x, y, z\}; \\ \succsim := \{(x,x), (y,y), (z,z), (x,y), (y,x), (y,z)\}. \end{cases}$$

このとき $x \sim y, y \succ z$ が成り立つが，$x \succ z$ は成り立たない．
しかしながら，$\succsim$ に対して completeness を仮定すれば，$x \sim y, y \succ z$ を満たす任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \succ z$ が常に成り立つ．実際，completeness の下では $x \succsim z$ または $z \succsim x$ が成り立つので，$x \succ z, x \sim z$ あるいは $z \succ x$ のいずれかが成り立つ．したがって $x \nsim z$ と $z \not\succ x$ を示せばよい．
まずは $x \sim z$ とすると，定義から $\sim$ が symmetry を満たすことは明らかなので，$z \sim x$．ゆえに transitivity から $z \sim y$ を得，$y \succ z$ に矛盾が生じる．
次に $z \succ x$ とすると，これも transitivity により $y \succ x$ を得，$x \sim y$ に矛盾が生じる．

5. ２項関係 R を $(\mathscr{B}, C)$ の revealed at-least-as-preferable-as relation とすると，仮定より xRy, yRz, zRy を得る．
初めに弱公理を満たすことを示す．x, y について，$\{x, y\} \subseteq B$ なる $B \in \mathscr{B}$ で $y \in C(B)$ を満たすものは存在しない．さらに，y, z について，x, z についても同様なので，条件に反することなく弱公理が満たされる．
次に強公理が満たされないことを示す．$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ とすると，$x_n R x_{n+1}, n = 1, 2$ が成り立つ．このとき，$\{x_1, x_3\} = \{x, z\}$ に対し，$x_3 = z \in C(\{x_1, x_3\}) = C(\{x, z\})$ であるが，$x_1 = x \notin C(\{x_1, x_3\}) = C(\{x, z\})$．ゆえに強公理は満たされない．

6. $(\mathscr{B}, C)$ が強公理を満たすことから，これに対し complete かつ transitive な選好関係 $\succsim$ が生成できる．
$C(\{x, y\}) = \{x\}, C(\{y, z\}) = \{y\}$ から，$x \succsim y, y \not\succsim x$ 及び $y \succsim z, z \not\succsim y$ より，$x \succ y, y \succ z$ である．さらに，$x \succ y, y \succ z$ 及び $\succ$ の transitivity により $x \succ y, x \succ z$ なので，$y \notin C(\{w, x, y, z\})$ かつ $z \notin C(\{w, x, y, z\})$．したがって，$C(\{w, x, y, z\})$ の取りうる値は $\{w\}, \{x\}, \{w, x\}$ のいずれかに絞られる．

次に，w と x の間の選好関係について、以下のように場合分けをして考える．なお，w と他の選択肢 y, z との具体的な選好関係については，completeness と transitivity が成り立っている限りここでは問わない．

$$\begin{aligned}&(1)\ w \succsim x, x \succsim w;\\&(2)\ w \succsim x, x \not\succsim w; \text{or}\\&(3)\ w \not\succsim x, x \succsim w.\end{aligned}$$

(1) の場合，$w \sim x$ が成り立つので，$C(\{w,x,y,z\}) = \{w,x\}$，(2) の場合，$w \succ x$ が成り立つので，$C(\{w,x,y,z\}) = \{w\}$，そして (3) の場合，$x \succ w$ が成り立つので，$C(\{w,x,y,z\}) = \{x\}$ である．したがって，$C(\{w,x,y,z\})$ は $\{w\}, \{x\}, \{w,x\}$ すべてを値として取る可能性がある．