

渋滞と混雑を解消する情報効率的メカニズムの設計

和田健太郎*

赤松隆†

概要

本研究は、“交通渋滞 (*queuing congestion*)”と“交通混雑 (*flow congestion*)”の2種類の経済外部性を解消し、かつ詳細な利用者情報を必要としない交通需要管理スキームを提案する。これは近年、ITSを活用した近未来型交通制度として提案された“ボトルネック通行権取引制度 (TBP)”を拡張したものである。TBPに関するこれまでの研究では、交通混雑を考慮しておらず、またマイクロ・メカニズムは明らかにされていない。そこで、本稿では、交通混雑を明示的に扱い、提案スキームのマイクロ・メカニズムをオークション理論及び、進化・学習ゲーム理論に基づき構築する。そして、提案スキーム導入下のマクロな交通流パターンが、社会的交通費用が最小となる社会的最適状態へと収束することを明らかにする。

JEL classification: R48, C73, D44

Keywords: 交通需要管理, ボトルネック混雑, 情報の非対称性, 通行権, オークション理論, 進化ゲーム理論

1 はじめに

世界中の多くの都市において、交通混雑による経済的損失は大きな社会問題である。その問題に対して、従来、交通需要管理 (TDM) 施策に関する多数の研究が蓄積されてきた。しかし、従来の多くの理論では、交通混雑の外部不経済に2種類のメカニズムがあるという事実は、その重要性にも関わらず、必ずしも注意深く扱われていない。すなわち、道路ネットワークにおける混雑現象は、大きく“交通渋滞 (*queuing congestion*)”と“交通混雑 (*flow congestion*)”に分けることができる。“交通渋滞”は動学的な混雑現象であり、交通量の容量超過に伴う待ち行列 (*queuing*) 発生により負の外部性を引き起こす。一方、“交通混雑”は待ち行列は発生しないが、交通量 (*flow*) 増加に伴う速度低下により負の外部性を生み出す。これら2つの混雑現象は、経済外部性の発生メカニズムが全く異なるため、両者を区別した上で包括的に対処する方策が求められる。

これら2種類の混雑現象のうち、一方のみを対象とする施策に対しては、これまで多くの研究がなされてきた。静的な現象であるとみなした交通混雑を対象とした主な施策は、限界費用原理に基づき通行料金を賦課する混雑料金制度である [1][2][3][4]。この制度下では、全リンクに課金可能な場合には、その課金下での均衡交通流パターンは社会的最適状態と一致することが示されている。一方、動的な現象である交通渋滞を明示的に考慮した施策としては、Arnott et al. に代表される幾つかの研究成果 [2][5][6] がある。これらの研究では、単一ボトルネックや並列経路等の単純なネットワーク状況の下、動的な最適混雑料金を導出している。

上記の混雑料金制度は、理論的には、経済外部性を解消する優れた施策である。しかし、この理論が有効に機能するためには、幾つかの前提条件が満たされる必要がある。より具体的には、混雑料金制度を実施する際に、道路管理者は、最適な混雑料金レベルを計算する必要がある。そのためには、利用者の需要関数情報 (*i.e.*

* 東北大学大学院 情報科学研究科 博士後期課程 1 年, 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6, wadaken@plan.civil.tohoku.ac.jp

† 東北大学大学院 情報科学研究科 教授, 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6, akamatsu@plan.civi.tohoku.ac.jp

支払意志額，時間価値，希望到着時刻 etc.) を正確に推定可能でなければならない．例えば，道路管理者が，交通費用に対する需要関数のレベルを現実よりも高いと推定していたとしよう．すると，その誤った想定に基づく“最適混雑料金”は，実際の需要条件に対応する真の最適混雑料金よりも高くなる．その結果，交通混雑は解消しても，トリップを諦める利用者が過剰に発生し (*i.e.* 消費者余剰の損失を生み)，社会的厚生水準は制度導入前よりも悪化する．この問題は，利用者が持つ私的情報を，道路管理者が把握できないために生じるものであり，経済学では一般に“情報の非対称性”と呼ばれる問題である．

従来の混雑料金制度の抱える情報の非対称性の問題に対して，需要関数情報を必要としない施策が，最近いくつかの分野から提案がなされている．1 つは，ゲーム理論分野で Sandholm[7][8][9] によって提案された“需要情報を必要としない混雑料金制度（以下では“進化的な混雑料金制度”と呼ぶ）である．これは，(静学的な)交通流の均衡配分が *Potential Game* (PG) として表現できることを利用し，試行錯誤的な料金設定を繰り返しながら，社会的最適状態へ収束させる方法である．より具体的には，PG アプローチでは，交通流パターン of *evolutionary dynamics* (利用者が日々，経路変更する結果として生じる交通流配分パターンの調整過程を表現する“day-to-day ダイナミクス”) が，社会的交通費用を最小化する均衡状態 (*i.e.* 社会的最適状態) へ収束することが証明されている (このダイナミクスは，Beckmann 型ポテンシャル関数の最小状態へ収束する)．しかし，この理論は，あくまでも交通混雑 (*flow congestion*) を前提にしているため，動的な現象である交通渋滞を扱うことができない．それは，交通渋滞を考慮した動的配分問題は，一般的にポテンシャル関数をもたないことによる．また，仮にこの理論が拡張可能だとしても，均衡状態へ至る過程における渋滞損失が大きいという問題点は依然として残る．

他方，交通ネットワーク理論の分野から，*Intelligent Transportation Systems* (ITS) を活用した近未来型の交通施策として，赤松・佐藤・Nguyen[10]，赤松 [11] によって，“ボトルネック通行権取引制度”が提案された．これは，渋滞が頻発している特定の道路地点 (ボトルネック) を対象として，a) その地点を特定の時刻のみ通行できる権利 (“ボトルネック通行権”) を道路管理者が設定・発行し，b) その時刻別の通行権を自由に売買取引できる市場を創設する，というものである．この施策下では，時刻別通行権の (単位時間当たり) 発行枚数が，当該ボトルネックへの到着交通流率となる．従って，その発行枚数をボトルネック容量以下に設定すれば，交通渋滞 (*queuing congestion*) の発生を完全に抑制できる．さらに，混雑料金に対応する通行権価格は市場取引の結果として決まる (*i.e.* 道路管理者が決める必要はない) ため，情報の非対称性は解消されている．しかし，この施策では，交通混雑 (*flow congestion*) を扱うことは通行権取引が煩雑となり，難しい．また，赤松らのこれまでの研究では，市場均衡にいたるマイクロ・メカニズム (*i.e.* 通行権市場の市場取引メカニズム) までは提示されていないという課題も残されている．

本稿では，単一ボトルネックの道路ネットワークを対象として，詳細な需要関数情報を必要とせずに“交通混雑”と“交通渋滞”を同時に解消する TDM スキームを提案する．そして，そのスキームの理論的特性を明らかにすることが本稿の目的である．より具体的には，提案スキームは，“ボトルネック通行権取引制度”と“進化的な混雑料金制度”から構成される．その合成スキームに対して，本稿では，従来の研究では明示的に扱われていなかった具体的なマイクロ・メカニズムを提示する．すなわち，個々の利用者の選択行動をモデル化し，通行権市場のオークション取引メカニズムを構築する．そして，提案スキームの下では，個々の利用者の行動の集計結果として得られる日々の交通流配分パターンが，社会的交通費用を最小化する状態へと収束することを明らかにする．

本稿の構成は，以下の通りである．まず，続く第 2 章では，本稿で提案するメカニズムの概要及び以降の解析の前提条件を述べる．第 3 章では，実現目標とする社会的最適配分を定式化する．第 4 章では，提案メカニズムの枠組みを示し，その下での，利用者個々人の選択行動をモデル化する．第 5 章では，提案制度で用いら

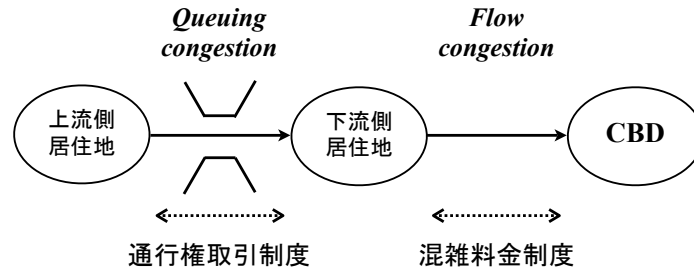


図1 状況設定

れるオークション取引のマイクロ・メカニズムを提示する．そして，その取引メカニズムが，資源配分および情報交換量の観点から効率的，かつ，誘因両立的であることを示す．第6章では，第4章，第5章において示されたマイクロ・メカニズムによって生じるマクロな現象の特性を検討する．すなわち，個々の利用者行動の集計結果として現れる交通流の day-to-day ダイナミクスを明らかにする．より具体的には，交通流が従うダイナミクスを導き，そのダイナミクスが，社会的最適状態に収束することを証明する．最後に，第7章では，本研究のまとめと今後の課題を示す．

2 状況設定および提案メカニズムの概要

2.1 分析対象とする交通空間条件

本稿では，線形に2つの居住地が並ぶ道路ネットワークを対象とする(図1)．ネットワーク内には，上流側，下流側の2つの居住地が存在し，各居住地に住む利用者は1つのCBDへとトリップを行う．このネットワークは，都心部と郊外部を結ぶ道路ネットワークを表したものである．具体的には，ネットワークの上流側リンクは都心部に流入するための(代替経路のない)道路を表現しており，下流側リンクは都市内道路ネットワークを1本のリンクとして集計して表現している．

上流側リンクにはボトルネックが存在し，交通渋滞が発生しうる．一方，下流側リンクは都市内道路ネットワークと流入交通量との定常的な関係が成り立つと仮定し(ミクロに見れば，場合によっては自由流領域と渋滞領域を推移しうる)，発生する交通混雑を平均的な遅れとして表現する．これは，複雑なリンク集合における混雑現象を，空間的に集約していることを意味する．

また，このネットワークは，交通渋滞と交通混雑が共存し，かつ，相互に影響を及ぼすケースの最も基本的なパターンである．相互作用は，下流側リンクを通行する各居住地の利用者を通して発生する．従って，このネットワークにおいて外部性を解消するためには，交通渋滞と交通混雑の2種類の外部性を包括的に扱わなければならない．このような状況は，朝の通勤交通等によく見られるものである．

上流側リンクのボトルネックは交通容量 μ を持つ *point queue* モデルで表現されていると仮定する．一方，下流側リンクの旅行時間は，単位時間当たりの交通量 x に対する単調増加関数 $c(x)$ (*i.e.* $\partial c(x)/\partial x > 0$) で表されると仮定する．すなわち，都市内道路ネットワークで生じる混雑現象を集約し，平均的な所要時間を統計学的な関数で近似的に表現する．また，各リンクにおいて追い越しが無い状況を想定し，First in First Out (FIFO) 条件は満たされていると仮定する．

本稿では，within-day における時刻別交通流パターンと，その交通流パターンの day-to-day ダイナミクス

を考える．そのため，時間の流れを日付 $t \in T$ 及び， t 内での時刻 $i \in I$ の 2 つの変数として区別する．ここで， i, t は共に離散的な変数とし，時間の流れに沿った整数の連番で区別する．また，本稿を通して，時刻 i は終点到着時刻を表しているとし，時刻に依存する変数の基準とする（FIFO 条件が成立すると仮定しているため，他の時刻を基準としても変わらない）．

2.2 道路管理者の行動

本稿で解析するモデルに表れる主体は，道路ネットワークの管理者と利用者である．道路管理者は，ネットワークで発生しうる交通混雑および交通渋滞を抑制し，社会的な交通費用の最小化を目指す主体である．そのために，交通混雑の発生する下流側リンクでは，“時刻別混雑料金”を利用者から徴収する．混雑料金の設定法については，以下の 2.4 節でより詳しく述べる．また，道路管理者は，交通渋滞の発生しうるボトルネック（*i.e.* 上流側リンク）に対して，“時刻別ボトルネック通行権”を設定・発行する．通行権の設定・発行・取引法については，以下の 2.5 節でより詳しく述べる．

2.3 利用者の行動

本稿で解析するネットワークの利用主体は，上流側居住地，下流側居住地の各々から CBD へ毎日 1 回のトリップを行う 2 種類の通勤者である．そのトリップに際して，各利用者は，自分の効用（その正確な定義は，第 3 章で与える）が最大となるように，終点到着時刻を選択する．ここで，1 日にトリップを行う利用者の総数は与件とし，上流側居住地の利用者数を M ，下流側居住地の利用者数を N とする．

下流側居住地の利用者が通過するリンクは，下流側リンクのみであり，自分の効用が最大となるように，終点到着時刻を選択する．一方，上流側居住地の利用者は，その通勤経路上にあるボトルネックを通過するために，ボトルネック通行権を“通行権取引市場”で購入する必要がある．従って，終点到着時刻の選択は，終点到着時刻に対応した時刻別通行権の購入と連動している．通行権取引市場と通行権の購入法については，以下の 2.5 節及び第 5 章で詳述する．

利用者の行動の結果，終点到着時刻 i を選択する利用者の総数（*i.e.* 交通量） x_i は，上流側居住地の利用者数 m_i と下流側居住地の利用者数 n_i の和（*i.e.* $x_i \equiv m_i + n_i$ ）として表現される．

2.4 進化的な時刻別混雑料金

本稿で用いる“進化的な混雑料金制度”は，Sandholm[7][8][9]によって提案された，需要関数情報を必要としない混雑料金制度と同様の考えに基づくものである．具体的には，day t で時刻 i に終点到着する利用者に対する混雑料金 $\lambda_i(x_i(t))$ は次式 (1) によって設定される：

$$\lambda_i(x_i(t)) = \gamma \cdot x_i(t) \frac{\partial c(x_i(t))}{\partial x_i} \quad \forall i \in I. \quad (1)$$

ここで， γ は旅行時間を金銭費用に変換する時間価値係数であり，簡単のため利用者によらず一定とする．

この混雑料金制度は，従来の静学的な混雑料金とは異なり，道路管理者は最適な交通流配分パターンを知る必要はない．すなわち，temporal に実現した交通流に応じて料金レベルを設定すればよい．また，式 (1) で与えられる混雑料金は，（第 3 章にて詳述する）社会的最適状態 x^* では，限界費用原理による最適混雑料金と一致するような関数である．

2.5 ボトルネック通行権とその取引市場

“時刻別ボトルネック通行権”とは、予め指定されたボトルネック地点を、予め指定された時刻にのみ通行できる権利である。本稿では、道路管理者が、ボトルネックに対して、この時刻別ボトルネック通行権を設定できる状況を想定する。すなわち、終点到着時刻 i に 1 対 1 対応する時刻 i' にボトルネックを流出する交通流は、時刻 i' の通行権を持っている利用者のみである（この通行権を持たない利用者は、このボトルネックを通行できないと仮定する）。

道路管理者は、ボトルネックの時刻別通行権を、ボトルネック地点における時間幅 $\Delta i'$ 当り、その交通容量に等しい枚数まで発行できるものとする。ここで、時間幅 $\Delta i'$ とは、終点における時間幅 Δi (*i.e.* $\equiv (i+1) - i$) と 1 対 1 対応するものである。時刻別通行権の定義により、利用される時刻別通行権の枚数は、ボトルネック流入率となる。従って、この発行条件下では、ボトルネックへの流入率が常に交通容量以下となり、渋滞は原理的に発生しない。

道路管理者が発行した全てのボトルネック通行権は、利用者に市場販売される。利用者は、この取引市場において、自分の希望する到着時刻に応じて必要となる時刻別通行権を購入する。取引市場では、時刻別の通行権に対して、オークションによって価格と購入者が決定される。この具体的な取引ルールについては、第 5 章で詳しく示す。

なお本稿では、下流側リンクで交通混雑が発生しているため、終点における時間幅 Δi とボトルネック地点における時間幅 $\Delta i'$ は必ずしも一致しない。しかし、終点における時間幅 Δi をある程度短くすれば、 $\Delta i'$ とのずれは十分小さく、その影響は無視できると考えられる。従って、本稿では終点における時間幅 Δi とボトルネック地点における時刻幅 $\Delta i'$ は一致していると仮定し、以後の解析を行う（時刻 i' を明示的に扱う必要はない）。

3 実現目標とする交通流配分パターン

本章では、提案メカニズムの導入によって実現を目指す交通流配分 (*i.e.* 社会的最適状態) を定式化する。以下では、まず、各利用者の交通費用、及び、効用を定義する。そして、社会的最適状態を定式化する。

3.1 利用者の交通費用及び効用の定義

提案スキーム導入下のネットワークにおいて、利用者が 1 回のトリップで費やす交通費用は、以下の a)-d) の費用から構成される：a) 終点への希望到着時刻 w と実際の到着時刻 i との差異に応じて決まる“スケジュール費用”，b) 下流側リンクの“旅行費用”，c) 下流側リンクで賦課される“進化的な混雑料金”，d) 上流側リンクを通行するために必要となる“ボトルネック通行権購入費用”。また、この交通費用は、a), b) のような“旅行費用”と、c), d) のように制度の導入によって課金される“通行費用”に区別することができる。

a) の“スケジュール費用 s_i ”は $i = w$ で最小値をとる凸関数であると仮定する。なお、本稿では記号の煩雑さを避け、理論的展開をわかりやすく示すために、利用者の希望到着時刻は同一とする（希望到着時刻が分布する場合へも容易に拡張可能である）。

b) の下流側リンクの“旅行費用”は、終点到着時刻別に異なる。時刻 i に終点へ到着する利用者が経験する旅行時間は、上流側利用者数 m_i と下流側利用者数 n_i の和である下流側リンクからの流出交通量 x_i に応じて $c(x_i)$ と決まる。そして、この旅行時間を金銭換算したものが下流側リンクの旅行費用となる。

c) の下流側リンクにおける“進化的な混雑料金 $\lambda_i(x_i)$ ”は、式 (1) によって、終点到着時刻別に両居住地の利用者に賦課される。

d) の上流側リンクにおける“ボトルネック通行権購入費用 p_i ”は、利用者が (第 5 章にて詳述する) 通行権市場において取引することによって決まる。

本稿では、各利用者の知覚する効用はそれぞれ異なるを考える。すなわち、各利用者の効用には、他人からは“観測不可能な情報 (*e.g.* 支払意思額)”が含まれている。これを“私的効用”と呼ぶ。より具体的には、上流側居住地の利用者 $\alpha \in L$ の効用には、利用者個人にとっては確定的な私的効用 ζ_i^α が含まれ、同様に、下流側居住地の利用者 $\beta \in R$ の効用には私的効用 ϵ_i^β が含まれる。この私的効用は個人のタイプを表しており、day $t \in T$ を通して変わることはない。上記で定義した費用及び私的効用を用いて、各利用者の効用は、

$$V_i^\alpha(x_i, p_i) \equiv \zeta_i^\alpha - \pi_i(x_i) - p_i \quad (2)$$

$$V_i^\beta(x_i) \equiv \epsilon_i^\beta - \pi_i(x_i) \quad (3)$$

$$\text{where } \pi_i(x_i) \equiv \gamma \cdot [c(x_i) + s_i] + \lambda_i(x_i) \quad (4)$$

と定義される。すなわち、各利用者の効用は私的効用から各費用を差引いたものである。ここで、各利用者が各々の時刻について持つ私的効用は費用に対して十分大きいと仮定する。従って、効用 (2), (3) は正である。

3.2 社会的に最適な交通流配分

本稿で目標とする交通流配分は、利用者全体での効用の総和を最大化する配分である。社会的に最適な配分パターンを定義するために必要な各利用者の効用は、

$$U_i^\alpha(x_i) \equiv \zeta_i^\alpha - \gamma \cdot [c(x_i) + s_i] \quad (5)$$

$$U_i^\beta(x_i) \equiv \epsilon_i^\beta - \gamma \cdot [c(x_i) + s_i] \quad (6)$$

と定義される。この効用には、混雑料金やボトルネック通行権購入費用は含まれない。なぜなら、これらの料金は、利用者から道路管理者への所得移転に過ぎず (*i.e.* 社会全体では費用ではない)、社会的最適配分を決める上で必要がないためである。

従って、利用者を 1 人 1 人区別した上 (*i.e.* 非集計モデル) で、社会的に最適な配分を求める問題は、以下の最適化問題 [SO-P] として表現される：

$$\max_{\mathbf{y}} \Pi(\mathbf{y}^\alpha, \mathbf{y}^\beta) \equiv \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in L} U_i^\alpha(x_i) y_i^\alpha + \sum_{i \in I} \sum_{\beta \in R} U_i^\beta(x_i) y_i^\beta \quad (7)$$

subject to

$$\sum_{i \in I} y_i^\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in L \quad (8)$$

$$\sum_{\alpha \in L} y_i^\alpha \leq \mu \quad \forall i \in I \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} y_i^\beta = 1 \quad \forall \beta \in R \quad (10)$$

$$x_i = \sum_{\alpha \in L} y_i^\alpha + \sum_{\beta \in R} y_i^\beta \quad \forall i \in I \quad (11)$$

$$y_i^\alpha, y_i^\beta \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall \alpha \in L, \forall \beta \in R. \quad (12)$$

ここで、変数 y_i は、各居住地の利用者が時刻 i に配分されるなら 1、そうでなければ 0 をとる離散変数である。

[SO-P] は、ネットワーク性能及び、状況設定から決まる制約条件の下、利用者が得る効用の総和を最大化する利用者別配分パターンを求める問題である。より具体的には、目的関数 $\Pi(y^\alpha, y^\beta)$ は各利用者の効用の総和である。制約条件 (8), (10) は各利用者が 1 日 1 回トリップを行う条件であり、(9) は上流側リンクの容量制約である。

最適配分問題 [SO-P] の最適性の必要十分条件は、以下の Kuhn-Tucker 条件で与えられる：

$$\begin{cases} y_i^{\alpha*} = 1 & \text{if } \zeta_i^\alpha - \pi_i(x_i^*) - p_i^* = \rho^{\alpha*} \\ y_i^{\alpha*} = 0 & \text{if } \zeta_i^\alpha - \pi_i(x_i^*) - p_i^* \leq \rho^{\alpha*} \end{cases} \quad \forall i \in I, \forall \alpha \in L \quad (13)$$

$$\begin{cases} p_i^* \geq 0 & \text{if } \sum_{\alpha \in L} y_i^{\alpha*} = \mu \\ p_i^* = 0 & \text{if } \sum_{\alpha \in L} y_i^{\alpha*} \leq \mu \end{cases} \quad \forall i \in I \quad (14)$$

$$\begin{cases} y_i^{\beta*} = 1 & \text{if } \epsilon_i^\beta - \pi_i(x_i^*) = \rho^{\beta*} \\ y_i^{\beta*} = 0 & \text{if } \epsilon_i^\beta - \pi_i(x_i^*) \leq \rho^{\beta*} \end{cases} \quad \forall i \in I, \forall \beta \in R. \quad (15)$$

$\rho^\alpha, p, \rho^\beta$ は、各々、制約条件 (8), (9), (10) に対応する Lagrange 乗数である。また、条件 (13), (15) には下流側リンクの社会的限界費用が含まれるが、最適配分状態においては $\pi_i(x_i^*)$ に一致するため上記のように表現することが出来る。

続いて、[SO-P] の双対問題 [SO-D] を考えよう。[SO-D] は、次のように定式化される：

$$\min_{\rho^\alpha, \rho^\beta, (\pi, p) \geq 0} \cdot \Pi_D(\rho^\alpha, \rho^\beta, \pi, p) \equiv \sum_{\alpha \in L} \rho^\alpha + \sum_{\beta \in R} \rho^\beta + \sum_{i \in I} \mu p_i + \sum_{i \in I} \int_{\underline{x}_i}^{\pi_i^*} \pi_i^{-1}(v) dv \quad (16)$$

subject to

$$\rho^\alpha \geq \zeta_i^\alpha - \pi_i \quad \forall i \in I, \forall \alpha \in L \quad (17)$$

$$\rho^\beta \geq \epsilon_i^\beta - \pi_i - p_i \quad \forall i \in I, \forall \beta \in R. \quad (18)$$

[SO-D] は、数量変数 (*i.e.* 配分) を未知変数とした最適配分問題 [SO-P] の双対問題である。従って、上記に示した [SO-D] は、価格変数を未知変数とした最適価格決定問題である。このとき、変数 ρ を各利用者の (間接) 効用、 p を通行権価格とみなすことができる。そして、目的関数は、通行権価格体系の下での利用者の“間接効用”の総和 (第一, 二項)、通行権による収入 (第三項)、混雑料金収入 (第四項) の和を意味している。

3.3 社会的最適配分の自律分散的な実現方策

[SO-P] は、中央集権的に道路管理者が各利用者の配分を決定する問題である。しかし、道路管理者は [SO-P] を直接解くことはできない。なぜなら、[SO-P] には、式 (5), (6) で定義したように、観測不可能な個々人の私的効用 $\zeta_i^\alpha, \epsilon_i^\beta$ が含まれているためである*1。このような状況は、料金設定に際して社会的最適状態を把握する必要のある混雑料金制度では、大きな障害となる。実際、[SO-P] の最適解を正しく求めることができなければ、従来型の混雑料金制度が有効に機能することは期待できない。

本稿では、このような現実的な状況の下で、社会的最適配分を実現する自律分散的なメカニズムを構成する。具体的なメカニズムについては、次章以降に詳述する。ここでは、最適配分問題 [SO-P] の最適性条件が、

*1 本稿では理論の展開をわかりやすく示すため、各利用者の観測不可能な情報を私的効用に限定している。しかし、時間価値 γ 、希望到着時刻 s を観測不可能な情報として扱う事も可能である。また、この場合にも本稿で示すメカニズムの性質は失われない。

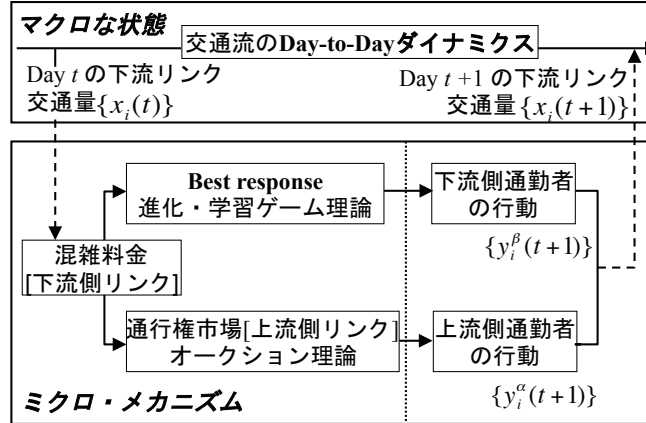


図2 提案メカニズムの枠組み

各利用者の選択行動とみなせることを示し、そこから、提案メカニズムの基本となる考え方のみを説明しておく。

最適性条件 (13) は、全ての $\alpha \in L$ に関して、

$$\rho^{\alpha*} = \max_{i \in I} \{ \zeta_i^\alpha - \pi_i(x_i^*) - p_i^* \} \quad (19a)$$

$$i^* = \arg \max_{i \in I} \{ \zeta_i^\alpha - \pi_i(x_i^*) - p_i^* \} \quad (19b)$$

$$\begin{cases} y_i^{\alpha*} = 1 & \text{if } i = i^* \\ y_i^{\alpha*} = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19c)$$

と等価である。いま、(14) を満たす p_i^* を通行権の“価格”と解釈すれば、 $V_i^\alpha \equiv \zeta_i^\alpha - \pi_i - p_i$ は、上流側居住地の利用者が終点到着時刻 i の通行権を購入する場合の“間接効用”とみなすことができる。従って、式 (19) は各利用者が“間接効用”を最大化する通行権 i^* を“選択”している条件であると解釈できる。

一方、式 (15) は下流側居住地の利用者の配分に関する条件である。ここでも、式 (19) と同様に表現すれば、 $V_i^\beta \equiv \epsilon_i^\beta - \pi_i$ を“間接効用”とみなすことができ、利用者が“間接効用”を最大化するように終点到着時刻 i^* を“選択”していると解釈することができる。

上記のように、最適配分問題の最適性条件は、各利用者が他人の行動を考慮せず、“自発的”に効用を最大化する選択を行っていることとみなせる。ただし、この条件が成立するためには、各利用者が“他人に影響が及ぶような戦略的な行動”をとらないという前提が必要である。例えば、ある利用者が通行権価格を戦略的に操作したとしよう。この場合、価格操作によって他人の効用レベルが下がる恐れがあり、その結果、社会的最適状態は必ずしも達成されない。この事実は、メカニズムデザイン理論において、Hurwicz[12] により最初に指摘されたものである。従って、メカニズムの設計に当たっては、利用者が戦略的な行動をとるインセンティブが働かない (*i.e. incentive-compatibility*) よう設計することが求められる。

4 提案メカニズムの枠組みとマイクロな利用者行動モデル

本章では、まず、提案メカニズムの枠組みを示す。これは、2.2 節、2.3 節で示された主体の行動と、2.4 節、2.5 節で示された各メカニズムが、本稿全体の枠組みの中で、どう位置づけられるかを与えるものである。

続く 4.2 節と第 5 章では、提案メカニズムに含まれるマイクロ・メカニズムを詳述する。具体的には、4.2

節では、利用者個々人の行動モデルを定式化する．この行動モデルは、第 3 章で示した提案メカニズムの基本的な考え方を反映したものである．すなわち、どのようなメカニズムを通して利用者の効用最大化行動が実現するかを提示する．第 5 章では、通行権取引市場のオークション・メカニズムを示す．

4.1 提案メカニズムの枠組み

提案メカニズムの枠組みは図 2 に示される．この図は、マイクロ・メカニズムと、そのメカニズムから生じるマクロな状態との関係を表している．提案メカニズムに含まれるマイクロ・メカニズムは、進化的な混雑料金制度、ボトルネック通行権取引制度、利用者の行動モデルの 1 つである best response (詳細は 4.2.2 節にて示す) であり、これらの一連のメカニズムを通して各利用者の行動が決定する．一方、マクロな状態とは、交通流の状態を意味しており、利用者が日々、マイクロ・メカニズムによって行動を変える結果として生じる交通流配分パターンの調整過程が、day-to-day ダイナミクスとして表される．

この枠組みにおいて、提案メカニズムがどのように機能するかを理解するために、day t から day $t + 1$ の一連の流れを時系列で記述しよう．まず、day t における利用者のトリップの結果、各時刻で交通流 $x(t)$ が実現する．道路管理者は、この temporal に実現した交通流 $x(t)$ を参照して混雑料金を計算し、その料金を利用者に賦課する．一方、利用者は、料金が賦課された後、day t で実現した各時刻の総交通費用を考慮しながら、day $t + 1$ の終点到着時刻を選択する．この過程を、より詳しく示すと、上流側居住地の利用者は、通行権市場における取引によって終点到着時刻を選択する．一方、下流側居住地の利用者は、best response (4.2 節で示す) によって終点到着時刻を選択する．この選択に従って、各利用者は day $t + 1$ のトリップを行う．そして、再び各時刻の交通流 $x(t + 1)$ が実現する．

4.2 利用者の日々の時刻選択行動

4.2.1 上流側居住地の利用者の選択行動

上流側居住地の利用者 α は、day t のトリップ後、後述のオークション市場 (*i.e.* 通行権市場) において day $t + 1$ の通行権を購入する．ここで、通行権市場における通勤者の通行権購入行動は、その日に実現した交通量 $x(t)$ に基づいて myopic に行われるとする．すなわち、各通勤者が付ける各終点到着時刻に対する入札額 (買値) b^α は、

$$b_i^\alpha(t) = \zeta_i^\alpha - \pi_i(x_i(t)) \quad (20)$$

と定義される．ここで、第一項は各利用者の私的効用を表しており、第二項は各利用者共通の下流側リンクの交通費用を表している．また、利用者の効用は次式で与えられるとする：

$$V_i^\alpha(t) = b_i^\alpha(t) - p_i(t) . \quad (21)$$

このとき、第 5 章で示す通行権市場の性質により、利用者の割当は各利用者の間接効用を最大化するように決まる．従って、day $t + 1$ において実現する通勤者 α の通行権の割当 y^α は次のように示される：

$$\begin{cases} y_i^\alpha(t + 1) = 1 & \text{if } i = \arg \max_{i \in I} . V_i^\alpha(t) \\ y_i^\alpha(t + 1) = 0 & \text{if otherwise .} \end{cases} \quad (22)$$

4.2.2 下流側居住地の利用者の選択行動

下流側居住地の利用者 β の行動ルールは、進化・学習ゲーム理論 [13][14] の枠組みを用いてモデル化される。進化・学習ゲーム理論は、動学化されたゲーム理論であり、繰り返しゲームを行うことを想定する。また、従来のゲーム理論においてプレイヤーに仮定されていた先読み合理性を必要とせず、temporal に実現する結果（前回ゲームで起きた結果）に対して myopic に戦略を選択するプレイヤーを仮定する。

ゲームに参加するプレイヤーのモデルは大きく、他のプレイヤーの行動に関する利得（あるいは、主観確率）の形成の仕方、利得に対する反応の仕方の 2 点で分類することができる。前者は、主観確率を形成せずに各時点でのゲームの結果をそのまま利得とする（学習なし）モデルや、他のプレイヤーの行動履歴を用いて、他のプレイヤーの行動に関する主観確率を形成する学習モデルがある。一方、後者に関しては、利得に対して最も自分の利得が高くなる戦略を選択する（best response）モデルや、利得の高いプレイヤーの行動を模倣するというモデルなどが代表的である。

本稿では、（学習なし）モデルの 1 つである “best response” を仮定する。このモデルは、Gilboa and Matsui[15], Matsui[16] によって提案されたものである。Best response では、day $t+1$ の戦略選択（*i.e.* 時刻選択）に、day t の利得を参照する。ここで、下流側居住地の利用者 β の利得は次のように myopic に形成される：

$$V_i^\beta(t) = \epsilon_i^\beta - \pi_i(x_i(t)). \quad (23)$$

そして、終点到着時刻変更機会を得た利用者 β は、式 (23) で表される利得を最大化するように終点到着時刻を選択する：

$$\begin{cases} y_i^\beta(t+1) = 1 & \text{if } i = \arg \max_{i \in I} V_i^\beta(t) \\ y_i^\beta(t+1) = 0 & \text{if otherwise.} \end{cases} \quad (24)$$

ここで、下流側居住地の利用者は終点到着時刻変更機会を、それぞれ独立な、 δ 単位時間（*i.e.* δ 日）周期で得ている。

5 通行権市場のオークション・メカニズム

本稿では、通行権市場をオークション理論 [17] を用いて構築する。オークション理論は、学際的領域に位置し、近年活発に研究が行われている。しかし、現時点では道路交通の分野における応用例はほとんどなく、馴染みの薄い分野である。したがって、論文の自己完結性のため、本章では、通行権市場のオークション・メカニズムの設計と対応させてオークション理論に関する記述も行う。

5.1 Vickrey-Clarke-Groves(VCG) メカニズム

VCG メカニズムは Vickrey[18] の同種複数財のオークションに端を発するオークション・メカニズムであり、その後 Clarke[19], Groves[20] によって異種複数財のオークションへと拡張された。この拡張されたメカニズムを VCG メカニズムと呼ぶ。

VCG メカニズムの定義は次に示すとおりである：(i) 入札者は入札しうる全ての財に対して入札（選好表明）を行う、(ii) オークション管理者は入札者の入札を受けて、自らの売却額が最大になるように入札者に対して

財を割り当てる，(iii) 財を落札した入札者の支払額は，自分が入札することによって生じる他者の社会的余剰の減少分とする（式 (29) 参照）。

VCG メカニズムは，ある適切な条件の下では，次の望ましい性質を持つことが知られている [17]：a) 効率的な資源配分を達成できる，b) 各利用者にとって，自分の選好を正直に表明することが支配戦略となる．性質 b) は，入札者が虚偽の選好表明を行うインセンティブが働かないことを意味し，*strategy-proofness* と呼ばれる性質である．

5.2 VCG メカニズムに基づく通行権市場の設計

ここからは，具体的に通行権市場を VCG メカニズムを用いて設計していこう．VCG メカニズムは，割当を決める“割当決定問題”と通行権価格を表す“Vickrey payments”を計算する 2 つの枠組みからなっている．

5.2.1 割当決定問題

道路管理者は，利用者によって申告された各時刻の通行権の評価額の総和を最大化するように決定する．これは社会的余剰を最大化することを意味する．したがって，day t の通行権市場において，その割当を決める割当決定問題 [A-P] は，第 4 章で定義された入札額 (20) を用いて，次のように定式化される：

$$F(\mathbf{y}, t) = \max_{\mathbf{y}^{(t+1)}} \cdot \sum_{\alpha \in L} \sum_{i \in I} b_i^\alpha(t) y_i^\alpha(t+1) \quad (25)$$

$$s.t. \quad \sum_{i \in I} y_i^\alpha(t+1) = 1, \quad \forall \alpha \in L \quad (26)$$

$$\sum_{\alpha \in R} y_i^\alpha(t+1) \leq \mu, \quad \forall i \in I \quad (27)$$

$$y_i^\alpha(t+1) \geq 0, \quad \forall i \in I, \alpha \in L. \quad (28)$$

[A-P] は，社会的最適配分問題 [SO-P] における各利用者の効用，及び，下流側居住地の利用者の配分を固定したときの部分最適化問題となっている．この [A-P] を解くことにより効率的な配分 $\mathbf{y}^{\alpha*}$ が求まる．ここで，目的関数は社会的余剰である．また， b^α は式 (20) に定義される利用者 α の通行権への“正直な”入札額であり， y_i^α は利用者 α が時刻 i の通行権を落札した場合 1，そうでない場合 0 となる変数である．式 (26) の制約式は，各利用者が 1 つの通行権しか落札できないという（利用者は 1 日に 1 回トリップを行う）条件であり，式 (27) はボトルネック容量制約を表している．

この割当決定問題は，一般には，組合せ最適化問題となり，解くことが困難である．しかし，本稿で扱う問題はネットワークフロー問題であるため，容易に解くことができる．すなわち，制約条件の係数行列が totally unimodular の性質 [21] を満たしているため，線形計画問題を解くのみで，整数解を得ることができる．

5.2.2 通行権価格 (Vickrey payments)

各利用者が支払うことになる通行権価格は，Vickrey payments により計算される．Vickrey payments は VCG メカニズムの性質 b) *strategy-proofness* を保証する重要なメカニズムである．具体的には，Vickrey payments は自分が入札することによって生じる他の参加者の社会的余剰の減少分と定義される：

$$p_{vcg}^\alpha = F^{-\alpha}(\mathbf{y}^{-\alpha*}, t) - [F(\mathbf{y}^*, t) - \sum_i b_i^\alpha(t) y_i^{\alpha*}(t+1)]. \quad (29)$$

ここで、上付き添え字 $-\alpha$ は、利用者 α を除いた利用者集合を表している。式 (29) の右辺の第一項 $F^{-\alpha}$ は利用者 α が入札に参加しなかったときの社会的余剰であり、第二項は現在の社会的余剰 F から利用者 α の余剰を除いた値である。この価格の下では、自分の虚偽の申告によって支払額を減少させることはできない。従って、利用者にとっては正直な選好を表明することが支配戦略となる（証明は Cramton et al.[17] を参照）。

上記の Vickrey payments を計算するためには、右辺第一項に示した利用者 α を除いた割当決定問題を新たに解く必要がある。従って、全ての利用者の通行権価格を求めるためには、上流側居住地の利用者の総数 M 個の線形計画問題を計算することとなる。

5.3 双対問題を用いた VCG 価格の計算法

5.2 節で示したように、“割当決定問題”，及び，“Vickrey payments”を計算するためには、利用者数 $M + 1$ の線形計画問題を解く必要がある。これは、本稿のように利用者数が膨大となる問題においては現実的ではない。そこで、以下では、割当決定問題（線形計画問題）の双対問題を考え、双対問題の解である競争均衡価格を利用して Vickrey payments を計算することを考える。

5.3.1 競争均衡と割当問題

Leonard[22] は、異種複数財・unit demand(各入札者の求める財は 1 つ)の割当問題において、Vickrey payments と同様に *strategy-proof* の性質を有する競争均衡解を導出するような双対問題を定式化した（導出は Leonard[22] を参照）。通行権市場のオークションは、通勤者が 1 枚の通行権を購入する unit demand の状況であり、同時に割当問題とも解釈できる。

まずは、[A-P] の双対問題 [A-D] を定式化しよう：

$$F^D(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}^\alpha, t) \equiv \min_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}^\alpha} \cdot \sum_{i \in I} \mu p_i(t) + \sum_{\alpha \in L} \rho^\alpha(t) \quad (30)$$

subject to

$$\rho^\alpha(t) + p_i(t) \geq b_i^\alpha(t), \quad \forall i \in I, \alpha \in L \quad (31)$$

$$\rho^\alpha(t), p_i(t) \geq 0, \quad \forall i \in I, \alpha \in L. \quad (32)$$

\mathbf{p} は通行権価格、 ρ^α は各利用者の余剰と解釈することができる。ただし、ここでの通行権価格 \mathbf{p} は競争均衡価格であり、Vickrey payments とは異なり *strategy-proofness* を満たさないことに注意しなければならない。競争均衡は次のように定義されるものである：

$$\rho^\alpha(t) = b_i^\alpha(t) - p_i(t) = \rho^{\alpha*}(t), \quad \forall i \in I, \alpha \in L \quad (33)$$

$$\max_{\mathbf{y}} \cdot \sum_{\alpha \in L} p^\alpha(\mathbf{y}) \quad (34)$$

$$\sum_{\alpha \in L} \sum_{i \in I} y_i^\alpha = M. \quad (35)$$

ここで、 $\rho^{\alpha*}(t) = \max_i [b_i^\alpha(t) - p_i(t)]$ である。式 (33) の条件は、各利用者が自分の余剰 (*i.e.* 間接効用) を最大化するような通行権を手にすることを示している。この $\rho^{\alpha*}(t)$ は、社会的最適状態において、[SO-P] の最適性条件 (19) の最適値に一致する。また、式 (34) は道路管理者の通行権売却額が最大となることを示している。式 (35) は需給均衡条件であり、供給された通行権の枚数と利用者の数が一致することを意味している。

本稿の問題では、この競争均衡解が必ず存在する。なぜなら、割当問題における競争均衡解の存在条件である“粗代替財 (*gross-substitutes*) 条件 [23]”を満たすためである。この条件は、他の時刻の通行権価格が上昇しても、利用者が (価格の上昇しない) 時刻の通行権を需要し続けることを要求するものである。各利用者は自分の効用を最大化する主体であるので、この条件は必ず満たされる。

5.3.2 最小競争均衡

ここでは、競争均衡価格と Vickrey payments が一致するような双対問題を示す。結論を先に示せば、Leonard[22] によって導出された双対問題 [A-minD] は、問題 [A-D] を競争均衡価格が最小になるように再定式化したものである：

$$F^{minD}(\mathbf{p}, t) \equiv \min_{\mathbf{p}} \cdot \sum_{i \in I} \mu p_i(t) \quad (36)$$

subject to

$$\begin{aligned} & \text{式 (31), 式 (32)} \\ & \sum_{i \in I} \mu p_i(t) + \sum_{\alpha \in L} \rho^\alpha(t) = F(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (37)$$

これは、競争均衡価格を最小化する問題である。また、式 (37) の制約条件は、各利用者の余剰を最大化する条件である。この問題の解を最小競争均衡と呼ぶことにする。最小競争均衡においては、利用者の最大効用が限界生産物と等しくなり、最小競争均衡価格が Vickrey payments に一致する (証明は Leonard[22] を参照)。

上記の [A-minD] を用いれば、Vickrey payments を 1 つの最適化問題を解くのみで計算できる。従って、割当決定問題 [A-P] と [A-minD] の 2 つの最適化問題を解くことのみで、通行権の割当、及び、各利用者の通行権価格が計算されることが示された。すなわち、次の命題が成立する：

命題 1 : 通行権市場により実現する通行権の割当は効率的であり、また、最小競争均衡価格として求まる通行権価格は Vickrey payments に一致する。従って、通行権市場の取引メカニズムは *strategy-proofness* を満たす。

5.4 競り上げオークションによる VCG 配分の実現

VCG メカニズムは、通行権市場を運営する道路管理者にとって、大幅な計算コストの削減となり、有益なメカニズムである。しかし、VCG メカニズムでは、入札者は全ての財に対して買値を申告しなければならず、利用者の手続きの煩雑さという点では、依然課題が残されている。また、これは、必要以上の私的効用を開示してしまうという点においても問題である。そこで本稿では、この課題に対する解決法として、Demange et al.[24] によって提案された競り上げオークション・メカニズムを利用する。このオークション・メカニズムにおいては、利用者は自分の需要する通行権のみに申告するのみでよい。以下ではこの競り上げオークション・メカニズムを詳述する。

まず、 Q を通行権の部分集合とする。続いて、利用者集合 $L(Q)$ を考え、この集合の要素である利用者は、次の条件を満たすとしよう。

$$\emptyset \neq D^\alpha(\mathbf{p}) \subseteq Q, \quad \forall \alpha \in L(Q). \quad (38)$$

ここで、 $D^\alpha(p)$ は価格 p の下での利用者 α の需要集合であり、以下のように定義される：

$$D^\alpha(p(r)) \equiv \arg \max_{i \in Q} [b_i^\alpha - p_i(r)] . \quad (39)$$

ここで、 r は競り上げオークションのラウンドを示している。また、もし次の条件を満たすならば、通行権の部分集合 Q を“超過需要集合”と呼ぶ。

$$|L(Q)| \geq |Q| . \quad (40)$$

式 (40) は、通行権の枚数よりその通行権を需要している利用者の数が多いことを意味する条件である。さらに、この超過需要集合の中で最小の集合（その集合の真部分集合が超過需要集合でない集合） $L^{\min}(Q)$ を、“最小超過需要集合”と呼ぶ。ここで、“全ての利用者が自身の需要集合の通行権を獲得する”という実行可能な割当が存在する必要十分条件は、通行権の超過需要集合がないことである。この存在条件は、グラフ理論の分野における Hall の定理（結婚定理）により判断される。

上記の定義の下、競り上げオークションのアルゴリズムは次のように記述される：

Step 0 : 全ての通行権価格 $p = 0$ とする。また、オークション・ラウンド $r = 0$ とする。

Step 1 : 利用者は現在価格に対して、自分の需要する通行権の“時刻”を申告する。ここでもし、超過需要集合 $L(Q)$ が存在しなければ Step 3 へ、そうでなければ、Step 2 へ。

Step 2 : 最小の超過需要集合 $L^{\min}(Q)$ を選び、幾人かの利用者が需要を変えるまでその集合の全ての通行権の価格を上げる。 $r = r + 1$ として Step 1 へ。

Step 3 : 各利用者に自身の需要する通行権を現在価格で割り当てる。Stop.

競り上げオークションでは、財が代替財であり、すべての入札者が各ラウンドにおいて需要を正直に申告すれば、VCG メカニズムと同様の配分結果が得られる。実際、このオークションの各ラウンドにおいて、各利用者の正直な選好表明はナッシュ均衡 [25] となる。従って、競り上げオークションの配分結果と VCG メカニズムの配分結果は、常に一致する。また、最終価格が最小均衡価格に収束し、Vickrey payments を導出することが保証されている（厳密な証明は Demange et al.[24] を参照）。すなわち、次の命題が成立する：

命題 2 : 競り上げオークションにより実現する通行権の割当は、VCG メカニズムにより実現する効率的な割当に一致し、通行権価格は Vickrey payments に収束する。このオークションにおいて、利用者の正直な選好表明はナッシュ均衡である。また、通行権市場における利用者の取引費用（計算コスト、必要とされる買値申告数、手続きの煩雑さ）は大幅に削減される。

上記に示した競り上げオークションは、割当決定問題 [LP] を Primal-Dual アルゴリズムで解くことに一致する [26]。従って、このことから競り上げオークションが VCG メカニズムと等価な結果を実現することが導くことができる（詳しくは付録 A を参照）。

6 交通流の day-to-day ダイナミクス

ここまででは、利用者 1 人 1 人を区別して (*i.e.* 非集計的に)、マイクロな行動モデル、通行権市場の取引メカニズムを示した。これは、提案メカニズムに含まれるマイクロ・メカニズムであり、このメカニズムを通

して個々の利用者の効用最大化行動 y はなされる．ただし，ここで決まる各利用者の効用最大化行動が，第3章で示した社会的最適配分 y^* に一致するとは限らない．なぜなら，利用者の（間接）効用 $V(x)$ は交通量パターン x に依存しているためである．ここで，利用者の行動 y と交通量パターン x ，各居住地から発生する交通量 m, n では，次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} x(t) &= m(t) + n(t) \\ m(t) &= \sum_{\alpha \in L} y^\alpha(t), \quad n(t) = \sum_{\beta \in R} y^\beta(t). \end{aligned}$$

従って，本章では，個々の利用者の行動 y の集計結果として現れる交通量パターン x ，すなわち，交通流の day-to-day ダイナミクスの特性を明らかにする．より具体的には，交通流の従うダイナミクスを導き，そのダイナミクスが，第3章で示した社会的最適状態に対応した交通量パターン x^* へ収束することを証明する．なお，交通量パターンが社会的最適状態にあれば，マイクロ・メカニズムによって，社会的最適配分 y^* が実現する．

6.1 交通流のダイナミクスの導出

第4章で示したように，提案メカニズム導入下において，day $t+1$ の各利用者の行動 y は，day t の交通量パターン $x(t)$ のみを参照して行われる．すなわち，将来実現する交通流は，現在の交通流の状態にのみ依存している．従って，まずは day t と day $t+1$ の交通流の関係を定式化してみよう．

下流側居住地の利用者の選択行動 y^β は，集計化することで，各時刻を選択する利用者数のシェアを考慮することができる．より具体的には，集団全体における各人の私的効用 ϵ_i^β とその頻度分布が，各々，実数値をとる $\tilde{\epsilon}_i^\beta$ とその連続的な分布によって近似できるとすれば，時刻 i を選ぶ利用者のシェア（を与える関数）は，

$$\begin{aligned} B_i(x(t)) &\equiv \Pr. \left[\tilde{V}_i^\beta(x_i(t)) > \tilde{V}_j^\beta(x_j(t)) \quad \forall i \neq j \right] \\ &= \Pr. \left[-\pi_i(x_i(t)) + \tilde{\epsilon}_i^\beta > -\pi_j(x_j(t)) + \tilde{\epsilon}_j^\beta \quad \forall i \neq j \right] \end{aligned} \quad (41)$$

と表される．また，下流側居住地の利用者は，それぞれ独立な， δ 単位時間（*i.e.* δ 日）周期で，戦略変更機会を得ている．すなわち，集計的には，day t と day $t+1$ の間に，総利用者 N のうち $1/\delta$ の利用者が変更機会を得る．従って，下流側居住地の交通流 n_i の単位時間当たりの変化は，

$$n_i(t+1) = \frac{1}{\delta} N B_i(x(t)) + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) n_i(t) \quad \forall i \in I \quad (42)$$

で与えられる．式 (42) の第一項は，戦略変更機会を得た利用者のうち，時刻 i を選択する利用者の集計量（*i.e.* 交通量）であり，第二項は，そのまま時刻 i を選択し続ける利用者の集計量である．

続いて，上流側居住地の利用者の選択行動 y^α を集計化しよう．その準備として，ここでは，第5章で示した競争均衡価格を求める問題 [A-D] を集計的に表現した [A/macro-D] を考える．[A/macro-D] は，[A-D] における利用者の私的効用 ζ_i^α の頻度分布が集団全体として連続的な分布で表現されるとすれば，次のように与えられる：

$$\min_{p(t) \geq 0} \sum_{i \in I} \mu p_i(t) + M \cdot S(v^\alpha(p(t))) \quad (43)$$

where

$$S(\mathbf{v}^\alpha(t)) \equiv E \left[\max_{i \in I} \left\{ v_i^\alpha(t) + \tilde{\zeta}_i^\alpha \right\} \right] \quad (44)$$

$$\mathbf{v}^\alpha \equiv -\pi(t) - \mathbf{p}(t) . \quad (45)$$

ここで, $S(\mathbf{v}^\alpha(t))$ は, 上流側居住地の利用者の期待最大効用を表している .

[A/macro-D] において求まる競争均衡価格 $\mathbf{p}(t)$ は, 離散値をとる [A-D] の解とは異なり, 実数値を用いて表されている (解が一意である) . 従って, $\mathbf{p}(t)$ は最小化する必要はなく, 極限において第 5 章で示した [A-minD] の解 (*i.e.* 通行権価格) に一致する .

[A/macro-D] を利用すると, 次の補題 1 が成立する :

補題 1 : 通行権市場における割当決定問題 [A-P] を集計的に表現した問題は, 次に示す問題 [A/macro-P] に帰着する .

$$\max_{\mathbf{P}^\alpha(t)} .M \cdot \left[\sum_{i \in I} -\pi_i(x_i(t)) \cdot P_i^\alpha(t) + H(\mathbf{P}^\alpha(t)) \right] \quad (46)$$

subject to

$$\sum_{i \in I} P_i^\alpha(t) = 1 \quad (47)$$

$$0 \leq P_i^\alpha(t) \leq \mu/M, \quad \forall i \in I \quad (48)$$

where

$$H(\mathbf{P}^\alpha(t)) \equiv \min_{\hat{\mathbf{v}}(t)} [\hat{\mathbf{v}}(t) \cdot \mathbf{P}^\alpha(t) - S(\hat{\mathbf{v}}(t))] \quad (49)$$

$$S(\hat{\mathbf{v}}(t)) \equiv E \left[\max_{i \in I} \left\{ \hat{v}_i(t) + \tilde{\zeta}_i \right\} \right] . \quad (50)$$

(証明 : 付録 B 参照)

変数 \mathbf{P}^α は各時刻を選択する上流側利用者のシェアである . すなわち, $MP_i^\alpha = m_i$ である . 式 (49) で定義される $H(\mathbf{P}^\alpha(t))$ は, $S(\hat{\mathbf{v}}(t))$ の Fenchel-Legendre 変換 [27][28] である . 関数 $S(\hat{\mathbf{v}}(t))$ と関数 $H(\mathbf{P}^\alpha(t))$ は, Fenchel-Legendre 変換によって 1 対 1 に対応している . このような関係にある関数は, 一般に, 共役関数と呼ばれる .

また, [A/macro-P] について, 補題 2 が成立する :

補題 2 : [A/macro-P] の最適解 $\mathbf{P}^\alpha(t)$ は, 交通量 $\mathbf{x}(t)$ と式 (48) に対応する Lagrange 乗数 $\mathbf{p}(t)$ を与えることによって決まる次の関数 $A(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ で与えられる :

$$A_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = \Pr . [-\pi_i(x_i(t)) - p_i(t) + \tilde{\zeta}_i^\alpha > -\pi_j(x_j(t)) - p_j(t) + \tilde{\zeta}_j^\alpha \quad \forall i \neq j] . \quad (51)$$

(証明 : 付録 C 参照)

$A(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ が各時刻を選択する上流側居住地の利用者数のシェアを与える関数である．ここで， $\mathbf{p}(t)$ は，[A/macro-P]における Lagrange 乗数であるが，最適状態では，先に示した双対問題 [A/macro-D] の解 (*i.e.* 通行権価格) に一致する．すなわち，シェア $A(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ は，交通量 $\mathbf{x}(t)$ と通行権価格 $\mathbf{p}(t)$ によって決まる．

上流側居住地の利用者は，各 day のオークションによって利用者全員が終点到着時刻変更機会を得る．従って，上流側居住地の交通流 m_i の単位時間当たりの変化は，上記で求めた $A(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ を用いて，

$$m_i(t+1) = M A_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \quad \forall i \in I \quad (52)$$

と与えられる．

式 (42)，(52) で与えられた交通量の単位時間当たりの変化率は，調整時間を $\Delta t \in (0, 1]$ として式変形を行うと，day t から day $t + \Delta t$ への変化率を表す式となる：

$$n_i(t + \Delta t) - n_i(t) = \frac{\Delta t}{\delta} [N B_i(\mathbf{x}(t)) - n_i(t)] \quad \forall i \in I \quad (53)$$

$$m_i(t + \Delta t) - m_i(t) = \Delta t [M A_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) - m_i(t)] \quad \forall i \in I. \quad (54)$$

ここで，変化が生じる調整期間を十分小さくすれば ($\Delta t \rightarrow 0$)，離散時間の交通流 (m_i, n_i) の変化率は，次に示す連続時間のダイナミクスによって近似的に表現される：

$$\dot{n}_i(t) = \frac{1}{\delta} [N B_i(\mathbf{x}(t)) - n_i(t)] \quad \forall i \in I \quad (55)$$

$$\dot{m}_i(t) = M A_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) - m_i(t) \quad \forall i \in I. \quad (56)$$

式 (55)，(56) のダイナミクスは，連立常微分方程式であり，時刻 i の交通量の増加項 (第一項) と減少項 (第二項) の差に応じて変化率の正負 (増減) が決まる．

6.2 交通流のダイナミクスの性質

ここでは，6.1 節で導出した交通流の day-to-day ダイナミクスの性質を調べる．まず，a) では，交通流が従うダイナミクスの停留点を示し，その停留点の交通状態と，社会的最適状態の関係を明らかにする．また，b) では，Lyapunov の安定性理論を用いて，交通流の day-to-day ダイナミクスが大域的に収束することを示す．

6.2.1 ダイナミクスの停留点の性質

式 (55)，(56) で定式化された連立常微分方程式の停留点は， $[\dot{m}, \dot{n}]^T = \mathbf{0}$ を満たす点である．従って，交通流ダイナミクスの停留点では，次の条件が成立する：

$$\mathbf{m}(t^*) = M \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}(t^*), \mathbf{p}(t^*)) \quad (57)$$

$$\mathbf{n}(t^*) = N \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}(t^*)) \quad (58)$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{m}(t^*) + \mathbf{n}(t^*) \quad (59)$$

$$\begin{cases} p_i(t^*) \geq 0 & \text{if } A_i(\mathbf{x}(t^*), \mathbf{p}(t^*)) = \mu/M \\ p_i(t^*) = 0 & \text{if } A_i(\mathbf{x}(t^*), \mathbf{p}(t^*)) \leq \mu/M \end{cases} \quad \forall i \in I. \quad (60)$$

命題 3 : 式 (55)，式 (56) で表される連立常微分方程式において $[\dot{m}, \dot{n}]^T = \mathbf{0}$ となるような停留点 $(\mathbf{m}^*, \mathbf{n}^*)$ は，第 3 章で示した社会的に最適な交通流配分パターンに一致する．

(証明：付録 D 参照)

命題 3 の結論は，停留点の状態 $(\mathbf{m}^*, \mathbf{n}^*)$ が，第 3 章で示した社会的最適配分パターン \mathbf{y}^* の集計的な表現であることを示している．一方で，この最適配分パターン $(\mathbf{m}^*, \mathbf{n}^*)$ は，非集計的な最適配分パターン \mathbf{y}^* を与える最適化問題 [SO-P] を，集計的に表現することでも得られる．この問題 [SO/macro-P] は次のように与えられる（証明は付録 E を参照）：

$$\max_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \Pi(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \equiv - \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} \pi_i(\tau) d\tau + \hat{H}(\mathbf{m}) + \hat{H}(\mathbf{n}) \quad (61)$$

subject to

$$\sum_{i \in I} m_i = M \quad (62)$$

$$m_i \leq \mu \quad \forall i \in I \quad (63)$$

$$\sum_{i \in I} n_i = N \quad (64)$$

$$m_i + n_i = x_i \quad \forall i \in I \quad (65)$$

$$m_i, n_i \geq 0 \quad \forall i \in I. \quad (66)$$

ここで， $\hat{H}(\mathbf{m})$ は， $S(\hat{v}^\alpha)$ の Fenchel-Legendre 変換 $H(\mathbf{P}^\alpha)$ に下流側居住地の総利用者数 M をかけたものであり，

$$\hat{H}(\mathbf{m}) \equiv \min_{\hat{v}^\alpha} [\hat{v}^\alpha \cdot \mathbf{m} - M \cdot S(\hat{v}^\alpha)] \quad (67)$$

と定義される． $\hat{H}(\mathbf{n})$ についても同様に定義される．

上記の問題は，最適状態における配分結果を与える問題であり，通行権価格は得られない．そこで，上記の問題の双対問題を考えよう．最適状態における通行権価格は，次に示す双対問題 [SO/macro-D] を解く事で得られる．

$$\min_{\pi, \mathbf{p} \geq 0} \Pi_D(\pi, \mathbf{p}) \equiv M \cdot S(\mathbf{v}^\alpha(\pi, \mathbf{p})) + N \cdot S(\mathbf{v}^\beta(\pi)) + \sum_{i \in I} \mu p_i + \sum_{i \in I} \int_{\pi_i}^{\pi_i^*} \pi_i^{-1}(v) dv \quad (68)$$

where

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}^\beta) &= E \left[\max_{i \in I} \{ \mathbf{v}^\beta + \tilde{\epsilon}_i \} \right] \\ \mathbf{v}^\alpha(\pi, \mathbf{p}) &\equiv -\pi - \mathbf{p} \\ \mathbf{v}^\beta(\pi) &\equiv -\pi. \end{aligned} \quad (69)$$

上に示した 2 つの最適化問題は，第 3 章で示した非集計的な社会的最適状態と，集計的な社会的最適状態の関係を理解する上で重要である．また，問題 [SO/macro-P] は，次節に示すダイナミクスの安定性の議論においても非常に有用である．

表 1 各最適化問題の関係

	非集計モデル	集計モデル
社会的最適状態		
最適配分問題	[SO-P]	[SO/macro-P]
最適価格決定問題	[SO-D]	[SO/macro-D]
均衡状態	$(y^{\alpha*}, y^{\beta*}, x^*, p^*)$ 式 (13)-(15)	(m^*, n^*, x^*, p^*) 式 (57)-(60)
オークション		
割当決定問題	[A-P]	[A/macro-P]
通行権価格決定問題	[A-minD]	[A/macro-D]

6.2.2 ダイナミクスの安定性

$[\dot{m} \ \dot{n}]^T$ が安定的に (大域的に) 均衡点に収束することを保証するために, 許容領域の中で定義される連続・微分可能な次のような関数 $\Pi_L(m, n)$ を考える.

$$\Pi_L(m, n) \equiv \Pi(m, n) - \Pi(m^*, n^*). \quad (70)$$

これは, [SO/macro-P] の目的関数から, 最適状態における目的関数値 (定数) を引いたものである. このとき, 式 (55), 式 (56) でされる連立常微分方程式に対して, 次の定理が成立する.

定理 1 : 式 (70) は, 式 (55), 式 (56) で表される常微分方程式の Lyapunov 関数である.

(証明: 付録 F 参照)

よって, 交通流の day-to-day ダイナミクスについて次の命題が成立する:

命題 4 : 本稿の提案スキーム下では, 交通流の day-to-day ダイナミクスは大域的に社会的最適状態へ収束する.

命題 3, 4 より, 本稿の提案スキーム導入下では, マイクロ・メカニズムから生じたマクロな現象である交通量パターンが安定的に, 社会的最適状態へ収束することが示された.

6.3 交通流の day-to-day ダイナミクスとマイクロ・メカニズムの関係

本章で議論したマクロな状態とマイクロ・メカニズムの関係は, 表 1 のように表される. この関係を情報量の観点から分析してみよう. まず, 前説で示した最適化問題 [SO/macro-P], [SO/macro-D] は, 第 3 章で示した非集計的な問題 [SO-P], [SO-D] を集計変数で表すことにより導かれた. このことは, 非集計モデルの方が多くの情報 (i.e. 私的効用 $\zeta_i^\alpha, \epsilon_i^\beta$) を必要とし, そこから集計的な社会的最適状態 x^* を導けることを意味

している。

一方、本章で示した交通流の day-to-day ダイナミクスは、集計的な社会的最適状態 x^* へ安定的に収束することが明らかになったが、この状態において、非集計的な社会的最適状態 y^* が達成されているかは（情報量が少ないため）判断することができない。しかし、第 4, 5 章で示したマイクロ・メカニズムの枠組み（*i.e.* 通行権市場, best response）を用いれば、非集計的な社会的最適状態 y^* が達成されていることが保証される。すなわち、本稿で提案したマイクロ・メカニズムを用いれば、そこから生じる交通流のダイナミクスが集計的な社会的最適状態へ収束するため、より少ない情報量で（私的効用を用いることなく）非集計的な社会的最適状態を実現できることが示された。

6.4 数値計算例

最後に、交通流の day-to-day ダイナミクスの性質（*i.e.* 均衡状態, 安定性）をより直感的に示すために、数値計算例を示す。これは、連立常微分方程式で表されたダイナミクス（*i.e.* 式 (53), (54)）を差分化し、計算した結果である。

6.4.1 ダイナミクスの具体化

6.1 節で示したように、day-to-day ダイナミクスは一般的な関数（*i.e.* S, H, A, B ）によって記述されていた。しかし、この関数は、集団全体に渡っての私的効用の頻度分布を決めれば、解析的に表すことができる。ここでは、集団全体の私的効用 $\tilde{\zeta}_i^\alpha, \tilde{\epsilon}_i^\beta$ が i.i.d. の Gumbel 分布に従うとしよう。このとき交通流のシェア $A(t), B(t)$ は、各々、ロジット型で与えられる：

$$B_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\exp[-\phi\pi_i(x_i(t))]}{\sum_{i \in I} \exp[-\phi\pi_i(x_i(t))]} \quad (71)$$

$$A_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = \frac{\exp[-\theta(\pi_i(x_i(t)) + p_i(t))]}{\sum_{i \in I} \exp[-\theta(\pi_i(x_i(t)) + p_i(t))]} \quad (72)$$

ここで、 ϕ, θ は、それぞれ、私的効用 $\tilde{\zeta}_i^\alpha, \tilde{\epsilon}_i^\beta$ の分布に対応する分散パラメータである。通行権価格 $p(t)$ は、

$$\mathbf{p}(t) = \arg \min_{\mathbf{p}(t) \geq \mathbf{0}} \left[\sum_{i \in I} \mu p_i(t) + M \cdot S(\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{p}(t))) \right] \quad (73)$$

で表され、この式に含まれる期待最大効用 $S(\mathbf{v}^\alpha)$ は、ログサム型の関数として与えられる：

$$S(\mathbf{v}^\alpha) = \frac{1}{\theta} \ln \sum_{i \in I} \exp[\theta v_i^\alpha] + E[\tilde{\zeta}_i^\alpha]. \quad (74)$$

一方、式 (67) で表される $\hat{H}(\mathbf{m})$ は、エントロピー関数となる：

$$\hat{H}(\mathbf{m}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{i \in I} m_i \ln \frac{m_i}{M}. \quad (75)$$

$\hat{H}(\mathbf{n})$ も同様に表される。

6.4.2 簡単な数値例

下流側リンクにおける旅行費用は BPR 型関数で与えられるものとし、パラメータの値を $\kappa = 2, \nu = 5$ と設定する。

$$c(x_i) = c_0 \{1 + \kappa(x_i/\hat{\mu})^\nu\}. \quad (76)$$

表 2 交通ネットワークに関する設定

	設定値
上流側総利用者数 (M)	2500 人
下流側総利用者数 (N)	5000 人
上流側ボトルネック容量 (μ)	50 台/min
BPR パラメータ ($\hat{\mu}$)	500
下流側リンク自由走行時間 (c_0)	15min

ここで、 c_0 は自由走行時間を表しており、 $\hat{\mu}$ は BPR 型関数のパラメータである。

スケジュール費用関数は、次のように与える：

$$s_i = |w - i|. \quad (77)$$

これは、希望到着時刻 w と実際に終点に到着した時刻 i の差であり、 $i = w$ で最小値をとる凸関数である。旅行費用とスケジュール費用の重み付けは、次のように設定する。スケジュール費用関数の重み付けパラメータを早着時 φ^e 、遅着時 φ^l とし、旅行費用関数の重み付けパラメータを η とする。このとき、

$$\begin{cases} \text{早着時} & \Rightarrow \eta c(x_i) + \varphi^e s_i \\ \text{遅着時} & \Rightarrow \eta c(x_i) + \varphi^l s_i \end{cases}$$

である。また、重み付けパラメータは $\varphi^e \leq \eta \leq \varphi^l$ を満たすとする。これは利用者にとって、遅刻が最も不効用をもたらし、続いて混雑、早着の順に不効用をもたらすことを意味している。具体的には、 $\varphi^e = 1$ 、 $\varphi^l = 1.5$ 、 $\eta = 1.2$ と設定する。また、旅行時間を金銭費用に変換する時間価値係数は $\gamma = 30$ 円/min とする。

状況設定としては、朝の定常的な通勤を想定する。すべての利用者は希望到着時刻 $w = 8:00$ を持つとし、終点到着時刻の選択を行い、CBD へ通勤する。交通ネットワークに関する値は表 2 に示す。

また、初期条件として、上記の設定に加え、上流側居住地の利用者に関する Gumbel 分布パラメータを $\theta = 0.01$ 、下流側居住地の利用者に関するロジットパラメータを $\phi = 0.01$ 、下流側利用者の終点到着時刻変更周期を $\delta = 22$ 、また、day $T = 150$ と設定し計算を行った。

この結果が、図 3、図 4、図 5 である。図 3 は、(結果的に) 利用者が選択した終点到着時刻を 10 時間帯ごとに集計した交通流の day-to-day ダイナミクスであり、縦軸は交通量、横軸は day を表している。この図より、各時間帯の交通流がある均衡点に収束していく様子が見える。図 4 は、社会的交通費用の day-to-day ダイナミクスであり、縦軸に総交通費用、横軸に day をとっている。ここで、図中の赤い線は社会的最適状態における総交通費用の値を示している。この図から、社会的交通費用は、社会的最適状態へ収束していることがわかる。

従って、上記の 2 つの結果から、交通流のダイナミクスは、大域的に収束し、その収束点 (*i.e.* 均衡点) は社会的最適状態であることが見て取れる。

また、図 5 は、最終日 (*i.e.* day=150) における (結果的に利用者の利用した) 各時刻の費用分布を示しており、縦軸は費用を表しており、横軸は各終点到着時刻を示している。また、色は図中に示した交通費用に対応している。この図は、各終点到着時刻の費用が均衡していることを示している。

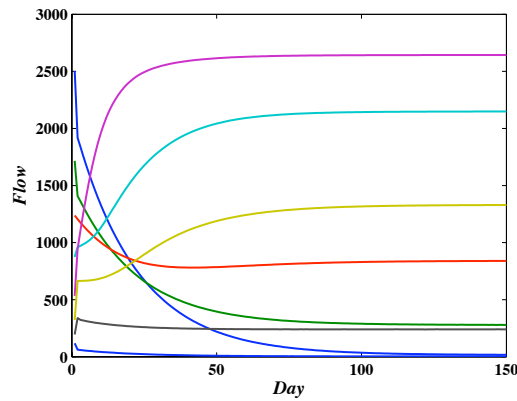


図3 交通流の Day-to-Day ダイナミクス

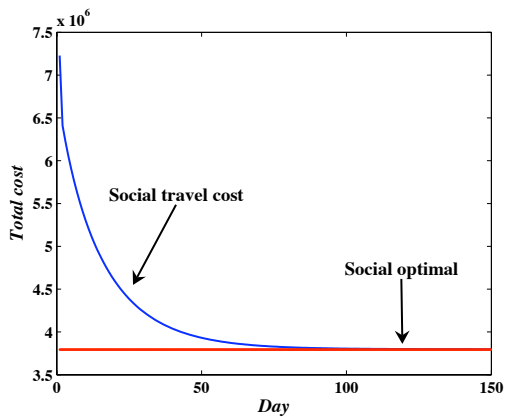


図4 社会的交通費用のダイナミクス

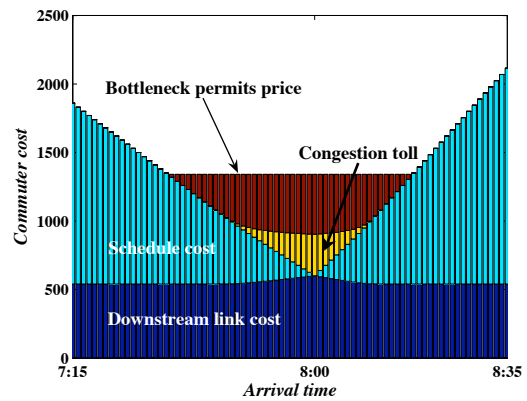


図5 Day= 150 における費用分布

7 おわりに

本稿では、“交通渋滞”と“交通混雑”の2つの経済外部性が存在するネットワークを対象として、両外部性が解消される交通流管理スキームを提案した。より具体的には、通行権市場の取引ルールをオークション理論を用いて構築し、利用者のマイクロな行動ルールを進化・学習ゲーム理論により設定した。そして、次のような結果を得た: i) 通行権市場は、効率的な資源配分を達成し、かつ、誘因両立的な市場である、ii) 交通流のダイナミクスは、社会的交通費用が最小となる社会的最適状態へ収束する。

本稿で示された第一の結果 (*i.e.* 効率的かつ誘因両立的な通行権市場メカニズム) は、あくまでも、単一ボトルネックを対象としたものである。複数のボトルネック (通行権市場) がある場合、複数の市場間での取引の自律性/連動性の度合に応じた様々な取引ルールが想定される。そのため、複数市場での取引ルールが、どのような条件を満たすべきかは、必ずしも、自明ではない。従って、一般的なネットワークにおける適切な通行権市場メカニズムの構築は、今後の重要な研究課題である。

本稿で得られた第二の結果 (*i.e.* 交通流ダイナミクスの収束性) は、通行権市場メカニズムの導入により、

提案スキームがポテンシャルゲームに帰着されるという事実に基づいている．従って，本稿で仮定した best response dynamics に限らず，ポテンシャルゲームに帰着しうる他の利用者行動モデル (*e.g.* Sandholm[29] 参照) を仮定しても，同様の帰結を得ることができる．また，本稿では，分析範囲を確定論的な枠組みに限定したが，確率論的な行動モデルである stochastic best response dynamics (*e.g.* Hofbauer and Sandholm[30][31]) を仮定した場合にも，ほぼ同様の帰結を得ることができる．その詳細については，改めて別の機会に報告したい．

付録 A Primal-Dual アルゴリズム

5.4 節で示した競り上げオークション・アルゴリズムは，5.2 節で示した割当決定問題 [A-P] を Primal-Dual アルゴリズムで解くことと等価であることが知られている [26]．以下では，この Primal-Dual アルゴリズムを簡潔に示す．

まず，実行可能な双対解 (*i.e.* 現在価格) $p = 0$ を与える．そして，現在価格において，以下に示す相補性条件を満たすように主問題の解 (*i.e.* 配分) を決定する．

$$\begin{cases} y_i^\alpha = 0 & \text{if } \rho^\alpha + p'_i(r) > b_i^\alpha(r) \\ y_i^\alpha = 1 & \text{if } \rho^\alpha + p'_i(r) = b_i^\alpha(r) . \end{cases} \quad (78)$$

続いて，この変数 y_i^α のみを用いて，制約条件を満たすように通行権を各利用者に割当てる．この手続きは，次の補助最適化問題 [RP] によって行われる．

$$\max_{\mathbf{y}} \sum_{\alpha \in L} \sum_{i \in D^\alpha(\mathbf{p}(r))} y_i^\alpha(r) \quad (79)$$

subject to

$$\sum_{\alpha: i \in D^\alpha(\mathbf{p}(r))} y_i^\alpha(r) \leq \mu, \quad \forall i \in I \quad (80)$$

$$\sum_{i \in D^\alpha(\mathbf{p}(r))} y_i^\alpha(r) \leq 1, \quad \forall \alpha \in L \quad (81)$$

$$y_i^\alpha(r) \geq 0, \quad \forall i \in D^\alpha(\mathbf{p}(r)), \forall \alpha \in L. \quad (82)$$

[RP] の解は，次の 2 つに場合分けされる：a) 全ての利用者が厳密に 1 つの通行権を獲得する解が存在する，b) a) のような解は存在しない．解 a) は容量制約の下，各利用者が 1 つの通行権を獲得していることと等価であり最適解が求まる（アルゴリズムは終了する）．一方，b) は超過需要集合が存在することと等価になり最適解ではない．従って，超過需要集合のうち最小の集合“最小超過需要集合”を選び出す．

[RP] の双対問題の最適解は，現在の双対変数の方向付けを行う．もし， p を現在の双対変数，[RP] の双対問題の解 p' とすると，次のラウンドで用いられる調整済みの双対変数は，

$$p(r+1) = p(r) + \Delta \cdot p'(r) \quad (83)$$

となる．ここで， Δ は，正の適切なステップサイズである．本稿で用いる Primal-Dual アルゴリズムでは，Vickrey payments と等価な最小競争均衡価格を求めるため，先のステップで選びだした最小超過需要集合に含まれる通行権の価格のみが調整される．そして，再び相補性条件を満たすように主問題の解が再計算される．

上記で示した, Primal-Dual アルゴリズムは, 各ラウンド r において各利用者の効用が最大化するように双対解 $p(r)$ が調整されている. 従って, 最終ラウンドにおいても, 各利用者の効用が最大化されており, 最終価格は Vickrey payments に収束する. 以上から, Primal-Dual アルゴリズムは次のように記述される.

- Step 0 : 全ての双対変数 $p = 0$ とする. また, ラウンド $r = 0$ とする.
- Step 1 : 相補性条件を満たすように主問題の解 y_i^α を決定し, そこから導かれる [RP] を解く. 解 a) が見つければ Step 3 へ, そうでなければ, Step 2 へ.
- Step 2 : 最小の超過需要集合 $L^{\min}(Q)$ を選び, そこに含まれる財の双対変数 p を, 適切なステップサイズ Δ と [RP] の双対解 p' を用いて調整する. $r = r + 1$ として Step 1 へ.
- Step 3 : 最終ラウンドでの双対変数 p , 割当が, 各々, 通行権価格, 各利用者が獲得する通行権となる. Stop.

付録 B 補題 1 の証明

まず, 第 3 章で示された [A-D] を考える. この目的関数の第二項は, [A-D] の制約条件 (31) を用いれば, 次のように表現することができる:

$$\sum_{\alpha \in R} \rho^\alpha(t) = \sum_{\alpha \in R} \max_{i \in I} \{-\pi_i(t) - p_i(t) + \zeta_i^\alpha\}. \quad (84)$$

ここで, 式 (20) を用いて, $b_i^\alpha = \zeta_i - \pi_i$ とした. また, 利用者数が十分大きく, 私的効用 ζ_i^α とその頻度分布が, 各々, 実数値をとる $\tilde{\zeta}_i^\alpha$ とその頻度分布で近似的に表現できるとすると,

$$\sum_{\alpha \in R} \max_{i \in I} \{-\pi_i(t) - p_i(t) + \tilde{\zeta}_i^\alpha\} \approx M \cdot E \left[\max_{i \in I} \{-\pi_i(t) - p_i(t) + \tilde{\zeta}_i^\alpha\} \right]$$

と近似することができる. 従って, [A-D] を集計変数で表現した問題は,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p} \geq 0} \cdot \sum_{i \in I} \mu p_i(t) + M \cdot S(\mathbf{v}^\alpha(t)) \\ \text{where} \quad \text{式 (44), 式 (45)}. \end{aligned} \quad (85)$$

で与えられる. すなわち, [A/macro-D] に一致する. また, この問題の双対問題を考えると, 問題 [A/macro-P] が導出される:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{P}^\alpha(t)} \cdot M \cdot \left\{ \sum_{i \in I} -\pi_i(x_i(t)) \cdot P_i^\alpha(t) + H(\mathbf{P}^\alpha(t)) \right\} \\ \text{subject to} \quad \text{式 (47), 式 (48)}. \end{aligned}$$

従って, [A/macro-P] が [A-P] を集計変数を用いて表現した問題であることが示された

付録 C 補題 2 の証明

まず, Lagrangean を次のように定義する:

$$L \equiv M \cdot \left[\sum_{i \in I} -\pi_i(x_i(t)) \cdot P_i^\alpha(t) + H(\mathbf{P}^\alpha(t)) \right] - \hat{\rho}^\alpha \left(1 - \sum_{i \in I} P_i^\alpha(t) \right) + \sum_{i \in I} p'_i(t) \left(\frac{\mu}{M} - P_i^\alpha(t) \right). \quad (86)$$

このとき, Kuhn-Tucker 条件は,

$$\frac{\partial L}{\partial P_i^\alpha} \cdot P_i^\alpha(t) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial P_i^\alpha} \leq 0, \quad P_i^\alpha(t) \geq 0 \quad (87)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p'_i} \cdot p'_i(t) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial p'_i} \geq 0, \quad p'_i(t) \geq 0 \quad (88)$$

と与えられる.

次に, $\partial L / \partial P_i^\alpha$ を計算するために, その中に含まれる $\partial H(\mathbf{P}^\alpha) / \partial P_i^\alpha$ を考えよう. これは, 式 (49) で与えられる $H(\mathbf{P}^\alpha)$ の定義式に対して, 包絡線定理を適用することにより得られる:

$$\frac{\partial H(\mathbf{P}^\alpha(t))}{\partial P_i^\alpha} = -\hat{v}_i(P_i^\alpha(t)). \quad (89)$$

$\hat{v}(P^\alpha)$ は, $H(\mathbf{P}^\alpha)$ で定義される最適化問題を, P^α をパラメータとして, 最小化する関数である.

式 (89) を用いると, 条件 (87) は, 次のように与えられる:

$$[-\pi_i(x_i(t)) - \hat{v}_i(P_i^\alpha(t)) - \hat{\rho}^\alpha(t) - p_i(t)] P_i^\alpha(t) = 0. \quad (90)$$

ここで, $\hat{\rho}^\alpha = \hat{\rho}'^\alpha / M$, $p = p' / M$ と置いた. 従って, 次の相補性条件が求まる:

$$\begin{cases} P_i^\alpha(t) \geq 0 & \text{if } \hat{v}_i(P_i^\alpha(t)) = -\pi_i(x_i) - p_i(t) - \hat{\rho}^\alpha(t) \\ P_i^\alpha(t) = 0 & \text{if } \hat{v}_i(P_i^\alpha(t)) \leq -\pi_i(x_i) - p_i(t) - \hat{\rho}^\alpha(t) \end{cases} \quad \forall i \in I. \quad (91)$$

また, この p を用いて, 最適性条件 (88) を書き直せば,

$$\begin{cases} p_i(t) \geq 0 & \text{if } P_i^\alpha(t) = \mu/M \\ p_i(t) = 0 & \text{if } P_i^\alpha(t) \leq \mu/M \end{cases} \quad \forall i \in I \quad (92)$$

が導かれる.

以上で, Kuhn-Tucker 条件は導かれたが, その中には, $H(\mathbf{P}^\alpha)$ の変数 $\hat{v}(P^\alpha)$ が含まれている. 従って, 最後に $\hat{v}(P^\alpha)$ と P^α の関係を考えよう. まず, 式 (49) で定義される最適化問題の一階条件は次のように与えられる:

$$P_i^\alpha(t) - \frac{\partial S(\hat{v}(t))}{\partial \hat{v}_i} = 0. \quad (93)$$

この関係を表したものが $\hat{v}(P^\alpha)$ であり、すなわち、 $\hat{v}(P^\alpha)$ は $\partial S(\hat{v})/\partial \hat{v}_i$ の逆関数に相当する。従って、次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} P_i^\alpha &= \hat{v}_i^{-1}(\hat{v}(P^\alpha(t))) \\ \Leftrightarrow P_i^\alpha &= \frac{\partial S(\hat{v}(P^\alpha(t)))}{\partial \hat{v}_i} \\ &= \Pr. \left[\hat{v}_i(P_i^\alpha(t)) + \tilde{\zeta}_i > \hat{v}_j(P_j^\alpha(t)) + \tilde{\zeta}_j \quad \forall i \neq j \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

以上、式 (91), (92), (94) が P^α の満たすべき条件である。また、式 (91), (94) を組み合わせることで、式 (51) で与えられた $A(x(t), p(t))$ が求まる

付録 D 命題 3 の証明

式 (13)-(15) で表される社会的最適条件を、各々、集計変数で表現しよう。式 (13) は、上流側居住地の各利用者が最大効用を与える終点到着時刻を選択することを意味していた。従って、時刻 i を選択する利用者 (*i.e.* $y_i^{\alpha*} = 1$) のシェアは、間接効用 \tilde{V}_i^α が最大となる利用者のシェアとして、次のように表される：

$$\begin{aligned} &\Pr. \left[\tilde{V}_i^\alpha(x_i^*) \geq \tilde{V}_j^\alpha(x_j^*) \quad \forall i \neq j \right] \\ &= \Pr. \left[-\pi_i(x_i^*) - p_i^* + \tilde{\zeta}_i^\alpha \geq -\pi_j(x_j^*) - p_j^* + \tilde{\zeta}_j^\alpha \right] \\ &= A_i(x^*, p^*). \end{aligned} \quad (95)$$

従って、時刻 i に下流側リンクに流入する上流側交通量 m_i^* は、シェア $A_i(x^*)$ に上流側居住地の総利用者数 M をかけて、

$$m_i^* = M \cdot A_i(x^*, p^*) \quad (96)$$

で与えられる。また、式 (15) で表される下流側居住地の利用者の選択行動も、上流側と同様にシェアとして表すことができる：

$$\begin{aligned} &\Pr. \left[\tilde{V}_i^\beta(x_i^*) \geq \tilde{V}_j^\beta(x_j^*) \quad \forall i \neq j \right] \\ &= \Pr. \left[-\pi_i(x_i^*) + \tilde{\epsilon}_i^\beta \geq -\pi_j(x_j^*) + \tilde{\epsilon}_j^\beta \quad \forall i \neq j \right] \\ &= B_i(x^*). \end{aligned} \quad (97)$$

従って、時刻 i にリンクに流入する下流側交通量 n_i^* は、

$$n_i^* = N \cdot B_i(x^*) \quad (98)$$

で表される。

式 (14) は、通行権価格 p^* の満たすべき条件である。ここで、 $\sum_{\alpha \in L} y_i^{\alpha*} = m_i^*$ が成り立つので、式 (14) は、集計変数を用いれば、

$$\begin{cases} p_i^* \geq 0 & \text{if } m_i^* = \mu \\ p_i^* = 0 & \text{if } m_i^* \leq \mu \end{cases} \quad (99)$$

と表される。

以上の式 (96), (98), (99) は、各々、式 (57)-(60) に一致する。すなわち、第 6 章で示された交通流の Day-to-Day ダイナミクスの停留点条件は、第 3 章で示した社会的最適状態を集計変数で表現したものに一致する。従って、命題 3 が証明された

付録 E [SO/macro-P] , [SO/macro-D] の最適性条件と停留点の関係

まず, [SO/macro-P] と [SO/macro-D] の最適性の必要十分条件を示そう. これは, Kuhn-Tucker 条件により次のように与えられる:

$$\begin{cases} m_i^* = \mu & \text{if } p_i^* \geq 0 \\ m_i^* \leq \mu & \text{if } p_i^* = 0 \end{cases} \quad (100)$$

$$m_i^* + n_i^* = \pi_i^{-1}(\pi_i^*) = x_i^* \quad (101)$$

where

$$\begin{aligned} m_i^* &= M \cdot P_i^\alpha, \quad n_i^* = N \cdot P_i^\beta \\ P_i^\alpha &\equiv \frac{\partial S(\mathbf{v}^\alpha)}{\partial v_i^\alpha} = \text{Pr} . [\tilde{V}_i^\alpha > \tilde{V}_j^\alpha \quad \forall i \notin j]. \end{aligned} \quad (102)$$

P_i^β も同様である. これは, (57)-(60) で表された停留点条件に一致する. 従って, 問題 [SO/macro-P], [SO/macro-D] が停留点条件を導出する問題であることが示された

続いて, 表 1 で示された各最適化問題の関係をより詳しく理解するために, 非集計変数を用いた最適化問題 [SO-P], [SO-D] から, [SO/macro-P], [SO/macro-D] を導出してみよう.

最適価格決定問題 [SO-D] の第一項, 第二項を上記 (1) と同様の手順で集計変数で表現すると, 次のように表すことができる:

$$\sum_{\alpha} \rho^\alpha \approx M \cdot E \left[\max_{i \in I} \left\{ -\pi_i - p_i + \tilde{\zeta}_i^\alpha \right\} \right] \quad (103)$$

$$\sum_{\beta} \rho^\beta \approx N \cdot E \left[\max_{i \in I} \left\{ -\pi_i + \tilde{\epsilon}_i^\beta \right\} \right]. \quad (104)$$

従って, 以上の集計化から, [SO-D] を集計変数で表現した最適価格決定問題 [SO/macro-D] が導かれる:

$$\min_{\pi, \mathbf{p} \geq 0} . \Pi_D(\pi, \mathbf{p}) \equiv M \cdot S(\mathbf{v}^\alpha(\pi, \mathbf{p})) + N \cdot S(\mathbf{v}^\beta(\pi)) + \sum_{i \in I} \mu p_i + \sum_{i \in I} \int_{\pi_i}^{\pi_i^*} \pi_i^{-1}(v) dv.$$

また, 双対問題を考えれば, [SO-P] を集計変数で表現した最適配分問題 [SO/macro-P] が導かれる.

付録 F 定理 1 の証明

$\Pi_L(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ が連立常微分方程式 (56), (55) に対する Lyapunov 関数になっていることを示す. 第 6 章で示した均衡状態において $\Pi_L(\mathbf{m}^*, \mathbf{n}^*) = 0$ が成立することは容易にわかる. 従って, 以下では $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \neq (\mathbf{m}^*, \mathbf{n}^*)$ のとき, 連立常微分方程式に対応した $\Pi_L(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ の時間変化率が,

$$\frac{d}{dt} \Pi_L(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \nabla \Pi_L(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \cdot \left[\frac{d\mathbf{m}}{dt} \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right] \geq 0 \quad (105)$$

を満たすことを示す. なお, $\Pi_L(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ の第二項 $\Pi(\mathbf{m}^*, \mathbf{n}^*)$ は定数であるため, 以後は省略して考える.

まず，式 (70) で表される Lyapunov 関数の観測可能な効用部分のみを部分線形近似した以下の問題 [P] を考える：

$$\begin{aligned} \max_{\hat{x} \in \Gamma} \hat{\Pi}_L(\mathbf{x}) &= -\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}} + M \cdot H(\hat{\mathbf{P}}^\alpha) + N \cdot H(\hat{\mathbf{P}}^\beta) \\ \text{where } \hat{\mathbf{x}} &\equiv \hat{\mathbf{m}} + \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{P}}^\alpha = \hat{\mathbf{m}}/M, \hat{\mathbf{P}}^\beta = \hat{\mathbf{n}}/N. \end{aligned} \quad (106)$$

ここで，許容領域 Γ は，問題 [SO/macro-P] の制約条件 (62)-(66) を満たす領域である．問題 [P] は観測可能な効用を既知とした場合の最適化問題である．従って， $\hat{\mathbf{x}}$ はその交通流パターンである．

いま，ある許容解 \mathbf{x} をベクトル $d = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ 方向へ移動した解を，

$$\mathbf{x}(\kappa) = \mathbf{x} + \kappa(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \quad (107)$$

と定義する．ここで κ はステップサイズを示している．すると，微小なステップサイズだけベクトル d 方向へ移動したとき，Lyapunov 関数 (70) の変化は，

$$\Delta \Pi_L = \frac{\partial \Pi_L(\mathbf{x}(\kappa))}{\partial \kappa} \quad (108)$$

で与えられる．ここで，問題 [SO/macro-P] の目的関数 $\Pi(\mathbf{x}(\kappa))$ と問題 [P] の目的関数 $\hat{\Pi}_L(\mathbf{x}(\kappa))$ は第一項の観測可能な効用に関する項を除けば同一形である．従って，式 (108) は $\hat{\Pi}_L(\mathbf{x}(\kappa))$ の κ に関する変化率によって評価することができる．すなわち：

$$\frac{\partial \Pi_L(\mathbf{x}(\kappa))}{\partial \kappa} = \frac{\partial \hat{\Pi}_L(\mathbf{x}(\kappa))}{\partial \kappa}. \quad (109)$$

ところで， $\hat{\Pi}_L(\mathbf{x}(\omega))$ は凹関数であるので，

$$\hat{\Pi}_L(\mathbf{x}(\kappa)) \geq (1 - \kappa)\hat{\Pi}_L(\mathbf{x}) + \kappa\hat{\Pi}_L(\hat{\mathbf{x}}) \quad (110)$$

が成り立つ．また， $\hat{\mathbf{x}}$ は問題 [P] の最適解であるから， $\hat{\Pi}_L(\hat{\mathbf{x}}) \geq \hat{\Pi}_L(\mathbf{x})$ である．従って， $0 \leq \kappa \leq 1$ の任意の κ について次の不等式が成立する：

$$\hat{\Pi}_L(\mathbf{x}(\kappa)) > \hat{\Pi}_L(\mathbf{x}). \quad (111)$$

さらに，この式の $\kappa \rightarrow 0$ とすると，

$$\frac{\partial \hat{\Pi}_L(\mathbf{x}(\kappa))}{\partial \kappa} > 0 \quad (112)$$

を意味する．

さて， $\Pi_L(\mathbf{x}(t))$ は， $\Pi_L(\mathbf{x}(t)) \leq 0$ かつ $\Pi_L(\mathbf{x}(t^*)) = 0$ であり，明らかに負定値である．さらに，上記の結果のステップサイズ κ を day t に読み替えれば，

$$\frac{d}{dt} \Pi_L(\mathbf{x}(t)) = \frac{d}{d\kappa} \Pi_L(\mathbf{x}(\kappa)) \geq 0 \quad (113)$$

が成り立ち，式 (105) が非負であること証明することができる．従って，定理 1 が成り立つ

参考文献

- [1] Mohring, H. and Harwitz, M.: *Highway Benefits: An Analytical Framework*, Northwestern University Press, 1962.
- [2] Button, K. J. and Verhoef, E. T.: *Road Pricing, Traffic Congestion and the Environment: Issues of Efficiency and Social Feasibility*, Edward Elgar, 1998.
- [3] Yang, H. and Hung, H. J.: *Mathematical and Economic Theory of Road Pricing*, Elsevier, Oxford, 2005.
- [4] Small, K. A. and Verhoef, E. T.: *The Economics of Urban Transportation*, Routledge, 2007.
- [5] Arnott, R., de Palma, A. and Lindsey, R.: A structural model of peak-period congestion: a traffic bottleneck with elastic demand, *American Economic Review*, Vol.83, pp. 161-179. 1993.
- [6] 桑原雅夫：動的な限界費用に関する理論的分析，土木学会論文集，IV-56, pp.127-138，2002.
- [7] Sandholm, W.H.: Evolutionary implementation and congestion pricing, *Review of Economic Studies*, Vol.69, pp.667-689, 2002.
- [8] Sandholm, W.H.: Negative externalities and evolutionary implementation, *Review of Economic Studies*, Vol.72, pp.885-915, 2005.
- [9] Sandholm, W.H.: Pigouvian pricing and stochastic evolutionary implementation, *Journal of Economic Theory*, Vol.132, pp.367-382, 2007.
- [10] 赤松隆，佐藤慎太郎，Nguyen Xuan Long：時間帯別ボトルネック通行権取引制度に関する研究，土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.605-620, 2006.
- [11] 赤松隆：一般ネットワークにおけるボトルネック通行権取引制度，土木学会論文集 D, Vol.63, No.3, pp.287-301, 2007.
- [12] Hurwicz, L.: On informationally decentralized systems, in *Decision and Organization: A Volume in Honor of J. Marchak* (eds. by R. Radner and C. B. McGuire), Amsterdam: North-Holland, 1972.
- [13] Fudenberg, D. and Levine, D. K.: *The Theory of Learning in Games*, MIT Press, 1998.
- [14] Vega-Redondo, F.: *Economics and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 2003.
- [15] Gilboa, I. and Matsui, A.: Social stability and equilibrium, *Econometrica*, Vol.59, pp.859-867, 1991.
- [16] Matsui, A.: Best response dynamics and socially stable strategies, *Journal of Economic Theory*, Vol.57, pp.343-362, 1992.
- [17] Cramton, P., Shoham, Y. and Steinberg, R.: *Combinatorial Auctions*, MIT Press, 2006.
- [18] Vickrey, W.: Counterspeculation, auction, and competitive sealed tenders, *Journal of Finance*, Vol.16, pp.8-37, 1961.
- [19] Clarke, E. H.: Multipart pricing of public goods, *Public Choice*, Vol.11, pp.17-33, 1971.
- [20] Groves, T.: Incentives in teams, *Econometrica*, Vol.41, pp.617-631, 1973.
- [21] Ahuja, R. K., Magnanti, T. L. and Orin, J. B.: *Network Flows Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1993.
- [22] Leonard, H. B.: Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to position, *Journal of Political Economy*, Vol.91, pp.461-479, 1983.
- [23] Kelso, A. S. and Crawford, V. P.: Job matching, coalition formation, and gross substitutes, *Econo-*

- metrica*, Vol.50, pp.1483-1504, 1982.
- [24] Demange, G., Gale, D. and Sotomayor, M.: Multi-Item auctions, *Journal of Political Economy*, Vol.94, pp.863-872, 1986.
- [25] Gul, F. and Stacchetti, E.: The english auction with differentiated commodities, *Journal of Economic Theory*, Vol. 92, pp.66-95, 2000.
- [26] Bikhchandani, S., de Vries, S., Schummer, J. and Vohra, R. V.: Linear programming and Vickrey auctions, in: Dietrich, B., and Vohra, R. V., eds, *Mathematics of the Internet: E-Auction and Markets*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol.127, Springer-Verlag, New York, pp.75-116, 2002.
- [27] Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [28] 宮城俊彦, 小川俊之: 共役性理論を基礎とした交通配分モデルについて, 土木計画学論文集, No.7, pp.301-308, 1985.
- [29] Sandholm, W.H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
- [30] Hofbauer, J. and Sandholm, W. H.: On the global convergence of stochastic fictitious play, *Econometrica*, Vol.70, pp.2265-2294, 2002.
- [31] Hofbauer, J. and Sandholm, W. H.: Evolution in games with randomly disturbed payoffs, *Journal of Economic Theory*, Vol.132, pp.47-69, 2007.