

2次元集積経済モデルによる Lösch 型集積パターンの創発: 三角形格子状の都市モデルにおける理論的解析

高山雄貴*・赤松隆†

2010年7月16日

概要

本研究では、新経済地理学分野で開発された Core-Periphery (CP) モデルを2次元多都市システムの枠組みに拡張し、安定的な均衡解として創発する集積パターンを理論的に明らかにする。そのために、Akamatsu et al. (2009) による1次元多都市 CP モデルの分岐解析手法を拡張し、2次元 CP モデルの解析を行う。その結果、Lösch (1940) の中心地理理論で示された、市場圏が六角形状になるように都市が配置される集積パターンが安定均衡解として創発することが明らかにされる。

Keywords: *Löschian hexagonal pattern, core-periphery model, two-dimensional triangular lattice, bifurcation analysis*

JEL classification: R12, R13, C62

1 はじめに

我国では、国土面積のわずか3% (人口集中地区) に、66% もの人口が集中している (総務省, 平成17年国勢調査)。このデータが示すとおり、殆どの人口・経済活動はごく限られた地域に集中している。では、このような人口・経済活動の空間的集中は、どこで、なぜ発生するのであろうか。この疑問に対する説明 (i.e., 経済集積メカニズムの解明) は、その重要性から、数多くの分野 (e.g., 経済学, 地理学, 建築学, 土木工学) において試みられてきた。

von Thünen (1826) を端緒に構築されてきた経済集積の理論のうち、人口や経済活動の空間分布の規則性を取り扱った代表的理論は、経済地理学分野の中心地理理論である。この理論は財の生産拠点である都市の規模・空間的配置と輸送費用の関係を説明しており、Lösch (1940) は市場圏が六角形状になるように企業 (都市) が配置されることを示した。しかし、その理論の直観的な説得力が認められる一方で、古くからミクロ経済学的基础の欠如が問題視されてきた (e.g., Krugman, 1995; Fujita, 2010)。

* 東北大学大学院情報科学研究科 博士後期課程 3年, 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,
E-mail: takayama@plan.civil.tohoku.ac.jp

† 東北大学大学院情報科学研究科 教授

そこで、都市の規模・空間分布と輸送費用の関係をミクロ経済学的基礎のあるモデルで説明する試みが、長年行われてきた。それらの試みにより、近年、新経済地理学分野において、Lösch による六角形の市場圏をもつ企業（都市）の配置パターン（以降、Lösch 型集積パターン）形成を説明し得ると期待される（Krugman, 1996）モデルがいくつか提案されている。その代表的なモデルは、Krugman による Core-Periphery (CP) モデル (Fujita et al., 1999) である。このモデルは、輸送費用の減少が人口・企業の集積をもたらすことを一般均衡の枠組みで明らかにしている。しかし、その期待とは裏腹に、最近まで、大半の研究は空間が退化した 2 都市間の集積・分散現象を分析するのみに留まっていた (Behrens and Thisse, 2007; Fujita and Krugman, 2004; Fujita and Thisse, 2009)。その中でも例外的に、赤松ら (2010)、Akamatsu et al. (2009) は、多都市 CP モデルを理論的に分析する方法を提示している。そして、その手法を適用することで、多都市 CP モデルで創発する集積パターンを明らかにしている。しかし、提示された分析手法は 1 次元空間でしか適用できず、中心地理論との整合性を直接確認できる 2 次元 CP モデルの特性は未だ解明されていない。

本研究では、2 次元空間多都市 CP モデルで、Lösch 型集積パターンが創発することを明らかにする。そのために、Akamatsu et al. の分岐解析手法を拡張し、2 次元空間に適用できる方法を提示する。そして、その手法を用いて、輸送費用の減少に伴い創発する集積パターンの一般的特性を示す。本研究で得られる結果は、Lösch 型集積パターンの創発がミクロ経済学的基礎から説明されることを初めて示しており、これは既存研究では全く知られていないオリジナルな貢献である。

本研究の構成は、以下のとおりである。まず、第 2 章で CP モデルを多都市の枠組みに拡張し、均衡条件を定式化する。次に、第 3 章で示す 2 次元 CP モデルの解析手法により、Lösch 型集積パターンが分岐現象の結果として創発することを第 4, 5 章で明らかにする。第 6 章では、第 4, 5 章の理論解析結果をわかりやすく示すために、数値計算例を提示する。最後に、第 7 章で結論を述べる。

2 Core-Periphery モデル

本稿では、Pflüger (2004) による 2 都市 CP モデルを多都市の枠組みに拡張する^{*1}。そこで、本章では、都市・経済環境の設定を示した後、均衡条件を定式化する。

2.1 都市・経済環境の設定

離散的な K 個の都市が存在する都市経済システムを考える。労働者は、知識・技術水準に応じて skilled worker と unskilled worker に分類されると仮定する。skilled worker は、高度な知識・技術を活かして、知識集約的な作業に従事する労働者であり、自らが労働・居住する都市を選択できる。unskilled worker は、高度な知識・技術を持たず、労働集約的な作業に従事する労働者である。また、すべての都市に一樣に分布し、労働・居住する都市を選択できない。skilled worker, unskilled worker の総人口は、各々、 H, L であり、全都市に一樣に分布する unskilled worker の各都市の人口が $l = 1$

^{*1} この拡張は、著者らの研究グループによる 1 次元多都市 CP モデルを扱った既存研究と全く同一である。その詳細は、Akamatsu et al. (2009)、Akamatsu and Takayama (2009)、赤松ら (2010) 参照。

となるように人口の単位を定義する．

この経済には，農業部門と工業部門の 2 部門が存在する．農業部門は，収穫一定の技術により，unskilled worker の労働を生産要素として 1 種類の同質な財を生産する完全競争的な部門である．工業部門は，収穫逡増の技術により，skilled 及び unskilled worker の労働を生産要素として，差別化された財を生産する独占競争的な部門である．ある都市で生産された財は，隣接する都市間を結ぶ交通ネットワークにより他の都市へ輸送することができるため，どの都市でも消費することができる．

2.2 主体の行動

2.2.1 消費者行動

都市 i の消費者は，効用関数 $U_i(C_i^M, C_i^A)$ を所得制約 Y_i の下で最大化するように，工業財と農業財の消費量 C_i^M, C_i^A を決定する：

$$\max_{C_i^M, C_i^A} U_i(C_i^M, C_i^A) = \mu \ln C_i^M + C_i^A \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } p_i^A C_i^A + \sum_j \int_{k \in N_j} p_{ji}(k) q_{ji}(k) dk = Y_i, \quad (1b)$$

ここで， $\mu > 0$ は工業財への支出割合を表す定数， $p_i^A = 1$ は都市 i における農業財の価格でありニューメレルとする． k は工業財の種類を表すインデックスであり，常に工業財の種類が連続的かつ無限に存在すると仮定するため連続変数とする． $p_{ji}(k), q_{ji}(k)$ は，各々，都市 j で生産され都市 i で消費される工業財の種類毎の価格と消費量， n_j は都市 j で生産された工業財の種類を表す． N_j は都市 j で生産された工業財の種類 k を要素に持つ集合である．また， C_i^M は，工業財の消費量 $q_{ji}(k)$ を代替の弾力性 $\sigma > 1$ を用いて集計した，

$$C_i^M \equiv \left(\sum_j \int_{k \in N_j} q_{ji}(k)^{(\sigma-1)/\sigma} dk \right)^{\sigma/(\sigma-1)}$$

によって定義される．

効用最大化問題 (1) を解くことにより，農業財・工業財の消費量が価格 $p_i^A, p_{ji}(k)$ ，所得 Y_i の関数として，次のように導出される：

$$C_i^A = (Y_i - \mu)/p_i^A, \quad C_i^M = \mu/\rho_i$$

$$q_{ij}(k) = \mu \{p_{ji}(k)\}^{-\sigma} \rho_i^{\sigma-1}$$

ここで， ρ_i は，都市 i での工業財の価格指数

$$\rho_i = \left(\sum_j \int_{k \in N_j} p_{ji}(k)^{1-\sigma} dk \right)^{1/(1-\sigma)} \quad (2)$$

である．以上の結果より，都市 i 全体で消費する都市 j で生産した工業財 k の消費量 $Q_{ji}(k)$ は，skilled worker の各都市の人口を $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{K-1}]^T$ とすると，次のように表せる：

$$Q_{ji}(k) = q_{ji}(k)(h_i + 1). \quad (3)$$

2.2.2 企業行動

農業部門では，unskilled worker の労働のみを生産要素とし，同質な財を完全競争のもとで収穫一定の技術により生産する．この場合，一般性を失うことなく，1 単位の unskilled worker の労働により，1 単位の財が生産されると基準化できる．したがって，限界費用原理から，農業財の価格 p_i^A は，unskilled worker の賃金 w_i^L と等しくなる．また，農業財の輸送には費用がかからないと仮定するため，どの都市においても農業財の価格，unskilled worker の賃金は等しい (i.e., $p_i^A = w_i^L = 1 \forall i$).

工業部門では，企業は Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を行う．すなわち，自由に参入・撤退できると仮定した企業が，収穫逓増の技術により差別化された工業財を生産する．規模の経済，消費者の多様性の選好，ならびに供給できる財の種類に制限がないことから，どの企業も必ず他企業とは異なる種類の財を生産する．そのため，生産を行う企業数は，供給される財の種類 n_i に等しい．また，企業が工業財を生産するためには，skilled worker の労働を α 単位と，生産量 $x_i(k)$ に応じて unskilled worker の労働を $\beta x_i(k)$ 単位，生産要素として投入する必要があると仮定する．この仮定から，生産を行う企業数 n_i は，都市 i に居住する skilled worker の人口 h_i により， $n_i = h_i/\alpha$ と表される．また，工業財の生産費用関数は，skilled worker の賃金を w_i とすると，以下のように与えられる：

$$c(x_i(k), w_i) = \alpha w_i + \beta x_i(k).$$

工業財の輸送には費用がかかると考える．この輸送費用は，氷塊費用の形をとると仮定する．すなわち，都市 i から j に 1 単位の工業財を輸送すると，1 単位のうち $1/\phi_{ij}$ 単位だけが実際に到着し，残りは溶けてしまうと考える．そのため，工業財の需要量 $Q_{ji}(k)$ と供給量 $x_i(k)$ との間に次の関係が成立する：

$$x_i(k) = \sum_j \phi_{ij} Q_{ij}(k). \quad (4)$$

工業部門では，Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を仮定しているため，企業は価格指数 ρ_i ，消費者の需要量 (3) を所与として自ら生産する工業財の価格 $p_{ij}(k)$ を設定する．そのため，企業の利潤最大化行動は，次のように定式化できる：

$$\max_{\{p_{ij}(k)\}} \Pi_i(k) = \sum_j p_{ij}(k) Q_{ij}(k) - c(x_i(k), w_i).$$

この企業の最適条件と工業財の需要量 (3) より，工業財の価格 $p_{ij}(k)$ が次のように導出される：

$$p_{ij}(k) = \frac{\sigma\beta}{\sigma-1} \phi_{ij}. \quad (5)$$

この結果から明らかなように，工業財の価格は財の種類 k には依存しない．さらに， $Q_{ij}(k)$ ， $x_i(k)$ も財の種類 k には依存しない．そこで，以降では k を省略し，各々， p_{ij} ， Q_{ij} ， x_i と表記する．

2.3 短期均衡条件と均衡解の導出

都市経済システムにおいて，財の生産・消費量と賃金，財価格は，skilled worker が移住できない程，短期間で均衡すると仮定する．この状態を“短期均衡状態”と呼ぼう．短期均衡状態では，企業

の参入・撤退が自由であることから，企業の利潤が常にゼロとなる．したがって，skilled worker の賃金は次のように表せる：

$$w_i = \alpha^{-1} \left(\sum_j p_{ij} Q_{ij} - \beta x_i \right). \quad (6)$$

さらに，短期均衡状態では，工業財の市場清算条件が成立する．工業財には輸送費用がかかるため，この市場清算条件は，式 (4) で表わされる．

以上の短期均衡条件から得られる短期均衡解を示そう．都市 i の価格指数 ρ_i は，式 (2) に式 (5) を代入することで，また，skilled worker の均衡賃金 w_i は，式 (6) に価格指数 ρ_i ，式 (3), (4), (5) を代入することで，以下のように導出できる：

$$\rho_i(\mathbf{h}) = \frac{\sigma\beta}{\sigma-1} \left(\frac{\Delta_i(\mathbf{h})}{\alpha} \right)^{1/(1-\sigma)},$$

$$w_i(\mathbf{h}) = \frac{\mu}{\sigma} \sum_j \left(\frac{d_{ij}}{\Delta_j(\mathbf{h})} \right) (h_j + 1).$$

ここで， d_{ij} は都市 i, j 間の交易条件を表わし，

$$d_{ij} \equiv \phi_{ij}^{1-\sigma},$$

$\Delta_i(\mathbf{h})$ は都市 i の工業財市場の大きさを表わす指標であり，以下のように定義される：

$$\Delta_i(\mathbf{h}) \equiv \sum_j d_{ji} h_j$$

d_{ij} , $\Delta_i(\mathbf{h})$ の定義から， $d_{ij}/\Delta_j(\mathbf{h})$ は，都市 i の企業が都市 j で獲得できる工業財市場のシェアの大きさを表わすことがわかる．

以上の結果は，Akamatsu et al. (2009) と同様， (i, j) 要素が d_{ij} である都市間の交易条件を表す空間割引行列 D を定義することで，その数学的構造を明確にすることができる．具体的には，空間割引行列 D と，

$$\Delta \equiv \text{diag}[\Delta_0(\mathbf{h}), \Delta_1(\mathbf{h}), \dots] = \text{diag}[D^T \mathbf{h}]$$

$$M \equiv D\Delta^{-1}$$

を利用すると，間接効用関数 v が skilled worker の各都市の人口 \mathbf{h} の陽関数として表現できる*2：

$$v(\mathbf{h}) = S(\mathbf{h}) + \sigma^{-1} \left[\mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}) + \mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}) \right]$$

ここで，右辺のベクトルは，

$$S(\mathbf{h}) \equiv (\sigma - 1)^{-1} \ln[D\mathbf{h}],$$

$$\mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}) \equiv M\mathbf{1}, \quad \mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}) \equiv M\mathbf{h}.$$

である．ここで，ベクトルの各要素に対数をとる場合， $\ln[\mathbf{a}] \equiv [\ln a_0, \ln a_1, \dots]^T$ と表記した．また， $\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 の $K \times 1$ ベクトルである．

*2 消費者の都市選択に無関係である定数項と係数 μ は省略した．

2.4 調整ダイナミクスと長期均衡条件

長期的には，skilled worker は，自らの得る効用を最大化するように労働・居住する都市を選択することができる．この skilled worker の都市選択及び移住行動が長期的に落ち着く状態を“長期均衡状態”と呼ぼう．CP モデルの長期均衡状態は，後に示されるように，複数存在する．したがって，均衡選択のためには，均衡解周りの摂動に対する安定性，すなわち局所的な漸近安定性を調べる必要がある．そこで，本節では，長期均衡状態を定義し，その安定性を調べる方法を示す．

長期均衡状態とその安定性を定義するためには，skilled worker の人口分布が均衡状態へ到達するまでの調整ダイナミクスを定義する必要がある．本研究では，この調整ダイナミクスとして，一般的な CP モデル (Fujita et al., 1999) で用いられる，Replicator dynamics を採用する：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{h}} &= \mathbf{F}(\mathbf{h}) \equiv \text{diag}[\mathbf{h}](\mathbf{v}(\mathbf{h}) - \bar{v}(\mathbf{h})\mathbf{1}), \\ \bar{v}(\mathbf{h}) &\equiv H^{-1}\mathbf{h}^T\mathbf{v}(\mathbf{h}).\end{aligned}\quad (7)$$

調整ダイナミクス (7) により，長期均衡状態を定義しよう．長期均衡状態 \mathbf{h}^* は，調整ダイナミクスの定常状態とする．すなわち，以下を満たす人口分布 \mathbf{h}^* が長期均衡状態である：

$$\mathbf{F}(\mathbf{h}^*) \equiv \text{diag}[\mathbf{h}^*](\mathbf{v}(\mathbf{h}^*) - \bar{v}(\mathbf{h}^*)\mathbf{1}) = 0.$$

2.5 長期均衡状態の安定性と分岐

均衡状態 \mathbf{h}^* の局所的な漸近安定性は，動的システム理論でよく知られているように，調整ダイナミクスの右辺 $\mathbf{F}(\mathbf{h}^*)$ の Jacobi 行列

$$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{h}^*) = \text{diag}(\mathbf{v}(\mathbf{h}^*) - \bar{v}(\mathbf{h}^*)\mathbf{1}) + H^{-1}\text{diag}(\mathbf{h}) \left[H\nabla\mathbf{v} - \mathbf{1}\mathbf{h}^{*T}\nabla\mathbf{v} - \mathbf{1}\mathbf{v}(\mathbf{h}^*)^T \right] \quad (8)$$

の固有値により調べることができる．より具体的には， $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{h}^*)$ の固有値の実部が全て負であれば安定，そうでなければ不安定である．式 (8) に含まれる Jacobi 行列 $\nabla\mathbf{v}$ は (i, j) 要素が $\partial v_i(\mathbf{h}^*)/\partial h_j$ の行列であり，以下のように表される：

$$\nabla\mathbf{v} = \nabla\mathbf{S}(\mathbf{h}^*) + \sigma^{-1} \left[\nabla\mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}^*) + \nabla\mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}^*) \right].$$

ここで，右辺の 3 つの Jacobi 行列は，各々，以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{S}(\mathbf{h}^*) &\equiv (\sigma - 1)^{-1}\mathbf{M}, \\ \nabla\mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}^*) &\equiv -\mathbf{M}^T\mathbf{M}, \\ \nabla\mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}^*) &\equiv \mathbf{M}^T - \mathbf{M}^T\text{diag}[\mathbf{h}^*]\mathbf{M}.\end{aligned}$$

CP モデルでは，パラメータの変化に伴い均衡状態 \mathbf{h}^* の安定性が切り替わる．この安定性が変化する現象は，数学的には分岐現象と呼ばれ，CP モデルでは，その分岐現象により様々な集積パターンが創発する．そこで，次章以降では，輸送費用の減少に伴う均衡解の分岐挙動を調べることで，CP モデルで創発する集積パターンを明らかにする．

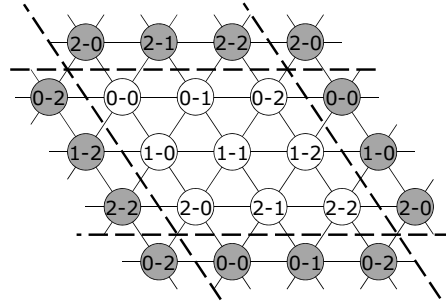


図1 3×3都市の周期構造

3 2次元空間の設定と解析の準備

2次元CPモデルで創発する集積パターンを解析的に把握するには、均衡解の分岐特性を明らかにする必要がある。すなわち、調整ダイナミクスのJacobi行列の固有値が、分岐パラメータ (e.g., 輸送費用パラメータ τ) に対してどのような特性を持つかを把握しなければならない。1次元CPモデルの分岐特性を調べる手法として、Akamatsu et al. (2009) は、1次元離散 Fourier 変換 (DFT) を活用した方法を提示している。本章では、その手法の考えを拡張し、2次元DFTを活用することで、2次元CPモデルの分岐特性を明らかにする。より具体的には、3.1節で設定する2次元空間において、空間割引行列の固有値 $f = [f_0, f_1, \dots, f_{K-1}]^T$ が容易に得られることを3.2節で示す。さらに、3.3節で、調整ダイナミクスのJacobi行列の固有値 $g = [g_0, g_1, \dots, g_{K-1}]^T$ が f の簡単な関数で表されることが明らかにされる。

3.1 周期境界2次元3×3都市システム

2次元平面を正三角形で分割し、その各頂点上に都市が存在する図1に示すような都市システムを考える。この都市システムには、3×3都市が存在し、その i 行 j 列に位置する都市を都市 $i-j$ と表記する。また、2次元空間の境界は周期境界とする。すなわち、図1の白色の3×3都市の境界は、灰色の都市で表されるように、周期的につながっていると考える。

前章までに定義したベクトルは、 $3i+j$ 番目の要素が都市 $i-j$ に関する要素となるように並べる。より具体的には、ベクトルの要素は、順に都市 0-0, 0-1, 0-2, 1-0, \dots , 2-2 の変数を表す。

2つの都市 $i-j, k-l$ 間の距離は、 $t(i-j, k-l)$ と表す。隣接する都市間の距離を1に基準化し、隣接していない都市間の距離は最短経路で定義する。すなわち、

$$t_{[3]}(i-j, k-l) \equiv \begin{cases} m_{[3]}(i, k) + m_{[3]}(j, l) & \text{if } (i-k)(j-l) > 0; \\ \max(m_{[3]}(i, k), m_{[3]}(j, l)) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$m_{[3]}(x, y) \equiv \min(|x-y|, 3-|x-y|).$$

すると、都市間の工業財の輸送に必要な氷塊費用は、

$$\phi_{i-j,k-l} \equiv \exp[\tau t(i-j, k-l)]$$

と定義される。ここで、 $\tau \in [0, \infty)$ は輸送費用の大きさを表すパラメータである。この $\phi_{i-j,k-l}$ の定義から、都市 $i-j$ から $k-l$ への交易条件を $(3i+j, 3k+l)$ 要素を持つ空間割引行列は、

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & D_1^T \\ D_1^T & D_0 & D_1 \\ D_1 & D_1^T & D_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

与えられる。すなわち、図 1 の i 行目の都市から k 行目の都市への交易条件は i, k ブロックの行列で表され、 j 列目の都市から l 列目の都市への交易条件はブロック内の行列の j, l 要素で表される。ここで、 D_0, D_1 は、各々、第 1 行が $d_0 = [1, r, r]$, $d_1 = [r, r^2, r]$ の巡回行列、 r は隣接する都市間の輸送条件を表し、次のように定義される:

$$r \equiv \exp[(1 - \sigma)\tau]. \quad (10)$$

3.2 空間割引行列の固有値

前節で示した空間構造下では、空間割引行列 (9) の各ブロック行列 D_k が巡回行列の順に並び、かつ、そのブロック行列自体も巡回行列の順に並ぶ。これは、Block Circulant with Circulant Blocks (以降、BCCB) と呼ばれる行列であり、2次元離散 Fourier 変換行列 Z

$$Z \equiv Z_{[3]} \otimes Z_{[3]}$$

による相似変換を施すことで対角化できることが知られている (e.g., Davis, 1979)。ここで、 \otimes はクローネッカー積、 $Z_{[3]}$ は 3×3 の離散 Fourier 変換行列である:

$$\begin{aligned} Z_{[3]} &= [z_{[3],0}, z_{[3],1}, z_{[3],2}], \\ z_{[3],k} &= [\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}]^T, \\ \omega &\equiv \exp[i(2\pi/3)]. \end{aligned}$$

空間割引行列 D の固有値・固有ベクトルは、以上の性質を利用することで、容易に与えられる。そこで、以降の分岐解析で重要な役割を果たす、空間割引行列の行和 $d \equiv (d_0 + 2d_1) \cdot 1$ で正規化した行列 D/d の固有値・固有ベクトルの特性を調べると、次の補題が得られる。

補題 3.1 空間割引行列 D/d の固有値・固有ベクトルは、以下の特性を持つ。

- 1) 第 $3i+j$ 固有ベクトル ($i, j = 0, 1, 2$) は、2次元離散 Fourier 変換行列の第 $3i+j$ 行ベクトル:

$$z_{3i+j} = \left[z_{[3],j}^T, \omega^i z_{[3],j}^T, \omega^{2i} z_{[3],j}^T \right]^T \quad (11)$$

によって与えられる。ここで、 $\omega \equiv \exp(i(2\pi/3))$ である。

2) 第 $3i+j$ 固有値 $f_{3i+j}(i, j = 0, 1, 2)$ は,

$$f_{3i+j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 0 \\ (1-2r)(1-r)/d & \text{if } i = j \neq 0 \\ (1+r)(1-r)/d & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

で与えられる .

- 3) $f_{3i+j}(i \neq j)$ は $0 < r \leq 1$ の r に関する単調減少関数である . また , その値域は , $[0, 1)$ である . $f_{3i+i}(i \neq 0)$ は r に関して単峰であり , $r \in (0, 0.5]$ の範囲では正 , $r \in (0.5, 1)$ では負の値を取る .
- 4) f_{3i+j} の最小値は任意の $r \in (0, 1)$ において , f_4, f_8 である .

3.3 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

2次元 CP モデルにおいて創発する集積パターンを調べる準備として , 全ての都市の条件が均一となる状況を考える . より具体的には , 各都市に skilled worker が $h \equiv H/9$ 人ずつ均等に分散した人口分布 \bar{h} (分散均衡状態) を初期の状態とする . このとき , $\nabla F(\bar{h})$ が BCCB となることを示そう . 人口分布 $h = \bar{h}$ である場合 , $M = (hd)^{-1}D$ であるから , 間接効用とその Jacobi 行列は ,

$$\begin{aligned} v(\bar{h}) &= \bar{v}(\bar{h})\mathbf{1}, \\ \nabla v(\bar{h}) &= h^{-1} \{b(D/d) - a(D/d)^2\} \end{aligned}$$

に帰着する . ここで ,

$$a \equiv \sigma^{-1}(1 + h^{-1}), \quad (13)$$

$$b \equiv (\sigma - 1)^{-1} + \sigma^{-1}. \quad (14)$$

したがって , $\nabla F(\bar{h})$ は以下のように与えられる:

$$\nabla F(\bar{h}) = -\frac{\bar{v}(\bar{h})}{9}\mathbf{E} + h \left(\mathbf{I} - \frac{1}{9}\mathbf{E} \right) \nabla v(\bar{h}). \quad (15)$$

ここで , \mathbf{E} は全ての要素が 1 である 9×9 行列である . この Jacobi 行列の右辺に現れる行列 $D, \mathbf{I}, \mathbf{E}$ は BCCB であるため , $\nabla F(\bar{h})$ もまた BCCB である .

以上より , 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値 g は , $\nabla F(\bar{h})$ が BCCB であるため , 以下の命題に示されるように , D/d の固有値 f の簡単な関数で表される:

補題 3.2 skilled worker が全都市に均等に分散した分散均衡状態 \bar{h} を考える . このとき , 2次元 CP モデルの調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla F(\bar{h})$ は以下の特性を持つ:

- 1) 第 $3i+j$ 固有ベクトル $(i, j = 0, 1, 2)$ は , 行列 D/d の固有ベクトルと同様 , 2次元離散 Fourier 変換行列 Z の第 $3i+j$ 行ベクトル z_{3i+j} で与えられる .

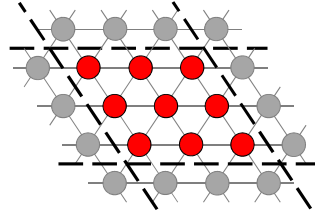


図 2-a 分散均衡状態

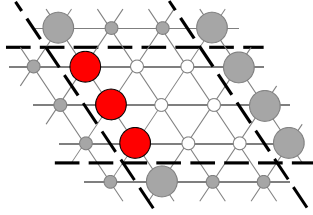


図 2-b 直線パターン

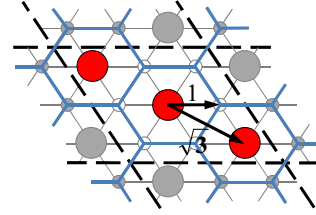


図 2-c Lösch 型集積パターン

図 2 固有ベクトルが表す集積パターン

- 2) 第 0 固有値は常に $-\bar{v}(\bar{h})$ である。第 $3i + j$ 固有値 $g_{3i+j}(i, j = 0, 1, 2)$ は、行列 D/d の第 $3i + j$ 固有値 f_{3i+j} の 2 次関数:

$$g_{3i+j} = G(f_{3i+j}) \quad (16a)$$

$$G(x) \equiv bx - ax^2 \quad (16b)$$

で表される。ここで、 a, b は $h \equiv H/9$ と σ から決まる定数で式 (13), (14) によって与えられる。

3.4 立地パターンと固有ベクトル

補題 3.2 で示された調整ダイナミクスの固有ベクトル z_k は、Akamatsu et al. (2009) で示されているように、その要素の配列パターンによって、各都市への skilled worker 人口集積パターンを表現している。例えば、 z_0 は、全要素が 1 であり、skilled worker が均等に分散した状態 (図 2-a) に対応する; $z_{3i+j}(i \neq j)$ は、図 2-b に示すように、直線上の都市に skilled worker が集積したパターン (以降、直線パターン) を表している; 同様に、 z_{3i+i} は、隣接する都市間の距離が $\sqrt{3}$ 倍に広がるパターンである (図 2-c)。図 2-c の集積パターンをボロノイ分割すると、その市場圏が正六角形となることが確認できる。これは、この集積パターン (以降、Lösch 型集積パターン) が Lösch による中心地理論で示された都市の配置パターンと一致することを意味している。

4 分散均衡状態からの分岐: Lösch 型集積パターンの創発

本章では、全ての都市の条件が均一となる分散均衡状態 \bar{h} から創発する集積パターンを明らかにする．そのために、前章で明らかにされた $\nabla F(\bar{h})$ の固有値・固有ベクトルを利用して、輸送費用パラメータ τ の減少に伴い発生する分岐の挙動を調べる．具体的には、まず、4.1 節で 2 次元 CP モデルにおいて分岐が発生する条件を示す．そして、分散均衡状態において発生する分岐により、Lösch 型集積パターンが創発することを 4.2 節で明らかにする．Lösch 型パターンが創発した後、さらに輸送費用 τ が減少した場合、再度、分散均衡状態が安定化するのを 4.3 節で示す．

4.1 分岐発生条件

2 次元 CP モデルで輸送費用の減少に伴い集積パターンが創発するには、均衡解が分岐する必要がある．そこで、分散均衡状態 \bar{h} から、輸送費用の減少に伴う分岐が発生する条件を確認しておこう．均衡解の分岐は、補題 3.2 で示した $\nabla F(\bar{h})$ の固有値 g_{3i+j} の符号が変化したときに発生する．この符号変化が起こるには、 $f_{3i+j}(i, j \neq 0)$ の値域の範囲内で

$$G(x) = 0 \quad (17)$$

となる必要がある．したがって、分岐の発生条件は、

$$1 - \sigma^{-1} > h \quad (18)$$

で与えられる．この条件は、CP モデルの既存研究でもよく知られている no-black-hole 条件である．この条件が満たされない場合、輸送費用パラメータ τ が高い状況でも、 g_{3i+j} が常に正となり、分散状態が不安定的となる．すなわち、 τ の減少に伴う分散均衡状態からの分岐が発生しない．そこで、以降の分岐解析では、この no-black-hole 条件が満たされている状況のみを考える．

4.2 Lösch 型集積パターンの創発

本節では、分散均衡状態から輸送費用の減少に伴い発生する分岐挙動を調べる．分岐が発生するのは、 $g_{3i+j} = 0$ を満たす瞬間である．すなわち、空間割引行列の固有値 f_{3i+j} が、式 (17) の解

$$x_+^* = b/a > 0, \quad x_-^* = 0 \quad (19)$$

で表される臨界値に達したときに分岐が発生する．

f_{3i+j} の分岐臨界値 x_+^* を利用して、輸送費用パラメータ τ が減少した場合に生じる均衡解の分岐挙動を示そう．ただし、本稿では、 τ と r に一対一対応関係 (10) があることから、 $r \in (0, 1]$ の増加に伴う分岐挙動を調べる．その準備のために、まず、固有値 $f_{3i+j}(\cdot)$ を r の関数と考え、その逆関数を $r_{3i+j}(\cdot)$ とする:

$$r_{\pm}^* = r_{3i+j}(x_{\pm}^*) \Leftrightarrow x_{\pm}^* = f_{3i+j}(r_{\pm}^*). \quad (20)$$

補題 3.1 からわかるように, $x_{\pm}^* \geq 0$ の範囲では, $x_{\pm}^* = f_{3i+j}$ を満たす $r \in (0, 1)$ が一意に決まる .
したがって, $r_{3i+j}(\cdot)$ が 1 価関数であることに注意が必要である .

初期状態では, 輸送費用が十分高く (r が十分小さく),

$$r < r_{3i+j}(x_+^*) \quad \forall i, j \neq 0$$

が成立しているとしよう . 逆関数 (20) の定義から, この条件は, $f_{3i+j} > x_+^* \quad \forall i, j \neq 0$ と等価である
ため, $g_{3i+j} < 0 \quad \forall i, j$ が成立する . したがって, この状況では分散均衡状態 \bar{h} は, 安定的である .

輸送費用が徐々に減少 (r が徐々に増加) すると, ある i^*, j^* に対して

$$r > r_{3i^*+j^*}(x_+^*) \quad (21)$$

が成立する . この条件は, $f_{3i^*+j^*} < x_+^*$ となることを表しているため, $g_{3i^*+j^*} > 0$, すなわち, 分散
均衡状態が不安定化し, 分岐が発生することが分かる . ここで, 最初に式 (21) を満たす i^*, j^* は, 補
題 3.1 より

$$3i^* + j^* = \arg \min_k f_k = 4, 8$$

である . したがって, r が臨界値

$$r_+^* \equiv \min_k r_k(x_+^*) = r_{3i+i}(x_+^*) \quad (i = 1, 2) \quad (22)$$

に達したときに, z_{3i+i} ($i = 1, 2$) に対応した集積パターン $h = \bar{h} + \delta z_4$ が創発する . r が
 r_+^* からさらに増加すると, δ が急激に増加し, 図 2-c に示す Lösch 型集積パターン $h_{(3)} =$
 $[3h, 0, 0, 0, 0, 3h, 0, 0, 0, 3h]^T$ となる .

以上で示された, 分散均衡状態における r の分岐臨界値 r_+^* は, D/d の固有値 f と x_+^* が与えられ
れば, 容易に求められる . パラメータと分岐臨界値 r_+^* の関係も, パラメータと x_+^* の関係 (19) から
確認できる . 以上の点を含めて, 2 次元 CP モデルにおいて, 分散均衡状態から発生する分岐挙動を
命題にまとめておこう .

命題 4.1 2 次元 CP モデルにおいて, no-black-hole 条件 (18) が満たされていると仮定する . r が十
分小さく分散均衡状態が安定的な状態から r を増加 (輸送費用を減少) させると,

- 1) 式 (22), (19) で与えられる r の臨界値 r_+^* で, Lösch 型集積パターン (図 2-c) への分岐が発生
する .
- 2) 分岐臨界値 r_+^* は, σ が小さく H が大きいほど小さい .

4.3 Lösch 型集積パターンの崩壊

前節では, f_{3i+j} の分岐臨界値のうち x_+^* のみについて議論した . そこで, x_-^* に関する分岐につい
ても調べよう . 輸送費用が r_+^* からさらに増加すると,

$$r > r_{3i+i}(x_-^*) = 0.5 \quad (i = 1, 2)$$

となる．これは，臨界値 $r_-^* = 0.5$ より r が大きい場合， $f_{3i+i} < x_-^* = 0$ ，すなわち， $g_{3i+i} < 0$ が成立することを表している．このとき， g_{3i+j} ($i \neq j$) も負であれば，分散均衡状態が再度安定化する．ここで， $g_{3i+j} < 0$ となるのは，

$$r < r_{3i+j}(x_+^*)$$

の範囲であるため，

$$r_{3i+j}(x_+^*) > 0.5 \quad (23)$$

を満たしていれば，Lösch 型集積パターンが崩壊する．この条件は， x_+^* が小さいほど満たされやすいことに注意すると，次の命題が得られる．

命題 4.2 条件 (23) が満たされた状況下で，命題 4.1 で示した Lösch 型集積パターンが創発しているとする．その状態から， r を増加（輸送費用を減少）させると，

- 1) r の臨界値 $r_-^* = 0.5$ において，Lösch 型集積パターンが崩壊し分散均衡状態が再度安定化する．
- 2) 分散均衡状態の再安定化は， σ が大きく H が小さいほど起こりやすい．

分散均衡状態が再度安定化する現象は，命題 4.2 で示した条件以外では発生しない．これは， r が $r_{3i+j}(x_-^*) = 1$ ($i \neq j$) を上回ることがないためである．

分散均衡状態が再度安定化した $r = r_-^*$ の状態から，さらに r を増加させると，

$$r > r_{3i+j}(x_+^*) \quad (i \neq j)$$

となる．これは， $f_{3i+j} < x_+^*$ となることを表しているため， $g_{3i+j} > 0$ となる i, j が存在するようになる．このとき， $r_{3i+j}(x_+^*)$ で， $z_{3i+j}(i \neq j)$ 方向の分岐が発生し，図 2-b で表される直線パターンが創発する．以上の結果から，次の命題が与えられる．

命題 4.3 条件 (23) が満たされた状況下で，命題 4.2 で示したように，分散均衡状態が安定化していると考えられる．その状態から r を増加（輸送費用を減少）させると，

- 1) 臨界値 $r_{3i+j}(x_+^*)$ ($i \neq j$) で直線パターン（図 2-b）への分岐が発生する．
- 2) 臨界値 $r_{3i+j}(x_+^*)$ ($i \neq j$) は， σ が小さく H が大きいほど小さい．

5 Lösch 型集積パターンからの分岐: Lösch 型集積パターンの進展

本章では，Lösch 型集積パターンが崩壊しない (i.e., 条件 (23) が満たされない) 状況を考える．このとき，Lösch 型集積パターンからさらに輸送費用が減少 (r が増加) すると，市場圏がその形 (正六角形) を維持したまま拡大する集積パターンが創発する．これを具体的に確認するために，Lösch 型集積パターンから発生する分岐の挙動を調べる．

5.1 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

Lösch 型集積パターンの安定性を調べるには、調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値を調べる必要がある。この固有値は、分散均衡状態とは異なり、 $\nabla F(\mathbf{h}_{(3)})$ が BCCB とはならないため、解析的に導出できないように思える。しかし、Lösch 型集積パターン $\mathbf{h}_{(3)}$ の部分的な対称性を利用すれば、固有値を得ることができる。

この対称性を利用するために、都市集合 C を skilled worker が居住する都市 $C_0 = \{0-0, 1-1, 1-2\}$ と、居住しない都市 $C_2 = \{0-1, 1-2, 2-0\}$, $C_3 = \{0-2, 1-0, 2-1\}$ の部分集合に分割する。この分割は、以下の置換 σ を考えることと一致する:

$$\sigma: \begin{bmatrix} 0-0 & 0-1 & 0-2 & | & 1-0 & 1-1 & 1-2 & | & 2-0 & 2-1 & 2-2 \\ 0-0 & 1-1 & 2-2 & | & 0-1 & 1-2 & 2-0 & | & 0-2 & 1-0 & 2-1 \end{bmatrix}$$

この置換を行うために、次の置換行列を定義しよう:

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_{(0)} \\ P_{(1)} \\ P_{(2)} \end{bmatrix}.$$

ここで、 $P_{(k)}$ は 3×9 行列である。 $P_{(k)}$ の i, j 要素は、 $i+k < 3$ のとき $j = 4i+k$ であれば 1、 $i+k \geq 3$ のとき $j = 4i+k-3$ であれば 1、そうでなければ 0 である。この置換行列を利用すると、 i, j 要素が a_{ij} である行列 A を考える場合、 PAP^T の i, j 要素は、 $a_{\sigma(i)\sigma(j)}$ となる。さらに、 $PP^T = I$ も成立する。

空間割引行列 D は、この置換行列 P により

$$D^\sharp \equiv PDP^T = \begin{bmatrix} D^{(0)} & | & rE_{[3]} & | & rE_{[3]} \\ \hline rE_{[3]} & | & D^{(0)} & | & rE_{[3]} \\ \hline rE_{[3]} & | & rE_{[3]} & | & D^{(0)} \end{bmatrix}$$

と変換することができる。ここで、部分行列 $D^{(0)}$ は、第 1 行ベクトルが $d_0^{(0)} \equiv [1, r^2, r^2]$ の巡回行列、 $E_{[3]}$ は全ての要素が 1 の 3×3 行列である。

空間割引行列の部分行列が巡回行列であることを利用すると、 $\nabla^\sharp F(\mathbf{h}_{(3)}) \equiv P\nabla F(\mathbf{h}_{(3)})P^T$ の各ブロックの部分行列も巡回行列であることが確認できる。この事実を用いると、第 3 章 3.3 節と同様の手順により、次の補題が得られる:

補題 5.1 Lösch 型集積パターン $\mathbf{h}_{(3)}$ での調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla F(\mathbf{h}_{(3)})$ の固有値は、以下のように与えられる:

$$g_{3i+j} = \begin{cases} -\bar{v}(\mathbf{h}_{(3)}) & \text{if } i = j = 0 \\ bf_j^{(0)} - \hat{a}(f_j^{(0)})^2 & \text{if } i = j = 1, 2. \\ v_1(\mathbf{h}_{(3)}) - \bar{v}(\mathbf{h}_{(3)}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

ここで、 $\hat{a} \equiv \sigma^{-1}\{1 + (3h)^{-1}\}$, $v_1(\mathbf{h}_{(3)})$ は skilled worker が居住していない都市の効用水準である。また、 $f_k^{(0)}$ は、 $D^{(0)}$ を行和 $d^{(0)} \equiv d_0^{(0)} \cdot 1$ で正規化した行列 $D^{(0)}/d^{(0)}$ の第 k 固有値である:

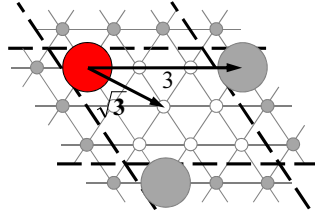


図3 1極集中パターン

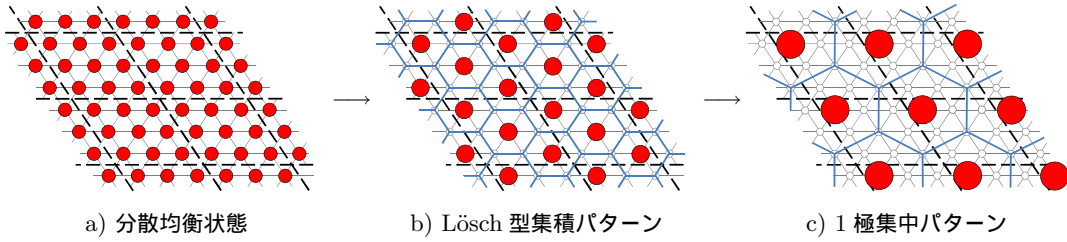


図4 輸送費用減少に伴う集積パターンの推移

$$\mathbf{f}^{(0)} = [1, (1-r^2)/d^{(0)}, (1-r^2)/d^{(0)}]^T. \quad (25)$$

5.2 Lösch 型集積パターンの進展

補題 5.1 より, Lösch 型集積パターン $\mathbf{h}_{(3)}$ において, $g_{3i+j} = 0$ となる f_j の分岐臨界値は,

$$x_{(3),+}^* = b/\hat{a} > 0, \quad x_{(3),-}^* = 0$$

で与えられる. 式 (25) より $f_k^{(0)} (k \neq 0)$ の値域は $[0, 1)$ である. したがって, r の増加 (輸送費用の減少) に伴う分岐は, $f_k^{(0)} = x_{(3),+}^*$ を満たす r の臨界値 $r_{(3),+}^*$

$$r_{(3),+}^* = \sqrt{\frac{1-b/\hat{a}}{1+2b/\hat{a}}} \quad (26)$$

で発生する. このとき創発する集積パターンは, 固有ベクトル $\hat{\mathbf{z}} = [1, 0, 0, 0, -1/2, 0, 0, 0, -1/2]^T$ に対応した集積パターン

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}_{(3)} + \delta \hat{\mathbf{z}} \\ &= [3h + \delta, 0, 0, 0, 3h - \delta/2, 0, 0, 0, 3h - \delta/2]^T \end{aligned}$$

である. $r_{(3),+}^*$ からさらに r を増加させると, $\delta \in (0, 6h]$ が急激に増加し, 最終的に \mathbf{h} は図 3 で示す 1 極集中パターン $\mathbf{h}_{(1)} = [9h, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ となる. 1 極集中パターンを周期的に並べると, 図 4 c) で示すように, Lösch が示した六角形状の市場圏が形成されていることが分かる. 以上の議論は, 次の命題にまとめられる.

命題 5.1 2次元 CP モデルにおいて，Lösch 型集積パターンが安定的であると考える．その状態からさらに r を増加させると，

- 1) 式 (26) で与えられる臨界値 $r_{(3),+}^*$ で 1 極集中パターンが分岐により創発する．
- 2) 臨界値 $r_{(3),+}^*$ は， σ が小さく H が大きいほど小さい

次に， $f_j^{(0)}$ の臨界値 $x_{(3),-}^* = 0$ に着目しよう． $f_j^{(0)} = x_{(3),-}^*$ となる r の臨界値は，

$$r_{(3),-}^* = 1$$

である．したがって，輸送費用が全くかからない状況にならないかぎり，1 極集中パターンは崩壊しないことが分かる．

以上で得られた解析結果から，輸送費用の減少に伴い集積パターンがどのように進展するかを見てみよう．図 4 は，分散均衡状態，Lösch 型集積パターン，1 極集中パターンの skilled worker の分布を周期的に並べた図である．この結果から，分岐により集積が進むにつれて，工業財の六角形状の市場圏が，その形（六角形）を保ちながら広がっていることがわかる．これは，Lösch (1940) による中心地理論の結果が，ミクロ経済学的基礎のあるモデルにより説明されることを意味する．

6 数値計算例による分岐大域的特性の確認

6.1 数値計算方法

本章では，前章までに得られた理論解析結果をわかりやすく示すために，輸送費用の減少に伴い 2 次元 CP モデルで創発する典型的な集積パターンの数値計算例を示す．ここでは，数値計算により均衡解を求めるアルゴリズムとして，Ikeda et al. (2010), 池田ら (2007) と同様，計算分岐理論と群論的分岐理論を適切に組み合わせた方法を採用する（計算分岐理論・群論的分岐理論の詳細は，Ikeda and Murota (2002) 参照）．数値計算の結果は，縦軸に都心（i.e., 企業数が最大の都市）における各産業の企業の割合，横軸に r を取った図により示す．

6.2 数値計算例

本節では，5 章で示した Lösch 型集積パターンが崩壊しないケースと，4 章 4.3 節で示した崩壊するケースを，数値計算例により示す．以降で示す数値計算例は， $\sigma = 5.0$ を固定して，skilled worker の総数 H を変化させた場合の結果である．

6.2.1 Lösch 型集積パターンが崩壊しない場合

まず，Lösch 型集積パターンが崩壊しない（i.e., 条件 (23) が満たされない）ケースとして， $H = 2.0$ とする場合を考えよう．このときの数値計算結果は，図 5 に示すとおりである．この結果から，輸送費用が減少するにつれて，安定均衡状態が“分散均衡状態 Lösch 型集積パターン 1 極集中”と変化していくことがわかる．この結果は，命題 4.1 1), 5.1 1) と整合的であり，分岐点も式 (22), (26) と

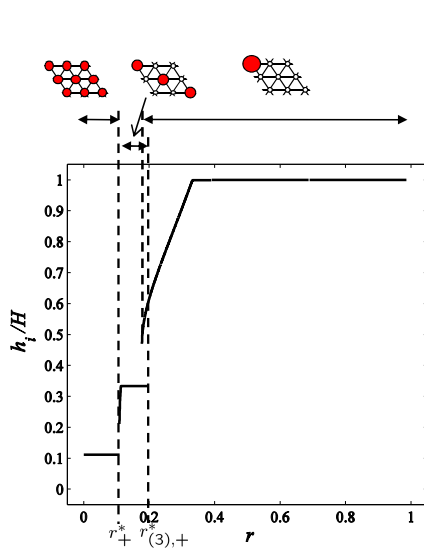


図5 数値計算例: $H = 2.0$

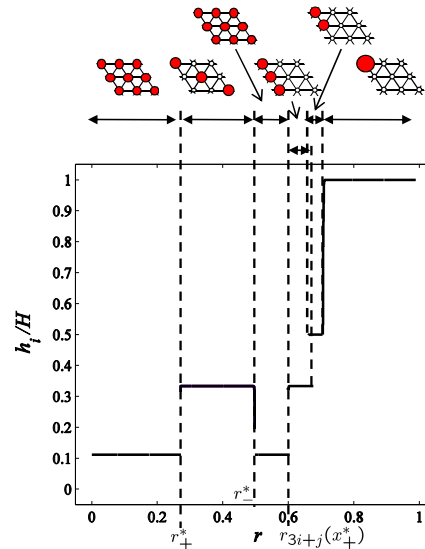


図6 数値計算例: $H = 0.5$

一致する。

6.2.2 L6sch 型集積パターンが崩壊する場合

次に、L6sch 型集積パターンが崩壊する (i.e., 条件 (23) を満たす) ケースとして、 $H = 0.5$ とする場合を考えよう。このとき、図 6 に示すように、“分散 L6sch 型集積パターン 分散 直線パターン 2 極 1 極” と推移する。ここで、2 極は $r = 0.7$ 付近で安定化する隣接する 2 都市に skilled worker が集中する集積パターンである。この結果も、前節と同様、解析により得られた命題 4.1 1)、4.2 1) と整合的である。

7 おわりに

本研究では、新経済地理学分野の CP モデルを 2 次元空間多都市モデルに拡張し、その均衡解の分岐特性を明らかにした。その結果、分散均衡状態が安定的な状態から輸送費用を減少させると、分岐により L6sch 型集積パターンが創発することを明らかにした。さらに輸送費用を減少させると、市場圏がその形を保ったまま拡大した L6sch 型集積パターンが分岐により創発することも示された。以上の結果は、ミクロ経済学的基礎を持つ CP モデルにおいて、L6sch 型集積パターンが安定均衡解となることを意味しており、従来研究では全く知られていない、本研究のオリジナルな貢献である。

本研究の結論は、Pflüger (2004) モデルに限定されたものではない。Ikeda et al. (2010)、Akamatsu and Takayama (2009) で示されているように、Pflüger モデルは、Krugman (1991)、Forslid and Ottaviano (2003) モデルと同一の分岐特性を持つ。したがって、Krugman モデル、Forslid and Ottaviano モデルを 2 次元空間に拡張しても、本研究と同様の結論が得られる。ただし、2 次元空

間を 3×3 都市の三角形格子で分割するという設定は、より一般化する必要があるだろう。例えば、 $N \times N$ 都市や正方形格子の場合の分岐解析は、今後の研究課題である。

本稿で示した様々な大きさの市場圏をもつ集積パターン (図 4) の重ね合わせは、Christaller (1933) が提示した都市システムの階層構造と一致する。この事実は、輸送費用の異なる (i.e., 市場圏の大きさが異なる) 複数種類の工業部門が存在する枠組みに拡張した 2 次元 CP モデルにより、Christaller 型の階層的都市システムが説明され得ることを示唆している。さらに、Christaller とはメカニズムが異なるものの、本研究の成果と高山・赤松 (2010) により示された階層構造の創発メカニズムを組み合わせることで、同様の集積パターンを表現することができる。したがって、これらを具体的に確認することも重要な課題である。

付録 A 補題 3.1 の証明

1) BCCB は 2 次元離散 Fourier 変換 (DFT) 行列 Z による相似変換で対角化できることから、固有ベクトルは Z の列ベクトル (11) で与えられる。

2) 空間割引行列 D の各ブロック行列 D_i は巡回行列であるため、 $Z_{[3]}$ による相似変換で対角化できる:

$$Z_{[3]} D_i Z_{[3]}^{-1} = \text{diag}[f_i].$$

さらに、空間割引行列 D/d が $Z_{[3]} \otimes Z_{[3]}$ による相似変換で対角化できることを利用すると、 D/d の固有値 f は、次のように与えられる:

$$\text{diag}[f] = \sum_{k=0}^2 \text{diag}[z_{[3],k}] \otimes \text{diag}[f_k].$$

ここで、 f_0, f_1, f_2 は、各々、ブロック行列 D_0, D_1, D_1^T の固有値である。以上で得られる固有値 f は、2 次元 DFT 行列 Z により、

$$f = Z d^T$$

で与えられることも知られている。これを計算しても式 (12) が得られる。

3) $\nabla F(\bar{h})$ の固有値を r で微分すると、

$$\frac{df_{3i+j}}{dr} = \begin{cases} (14r^2 - 9)/d^2 & \text{if } i = j \neq 0 \\ -\frac{1 + 2r + 11r^2 + 4r^3}{d^2} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

が得られる。したがって、 f_{3i+j} ($i \neq j$) は r の単調減少関数、 f_{3i+i} は単峰であることがわかる。また、式 (12) より、 f_{3i+i} は $r \leq 0.5$ であれば正の値、そうでなければ負の値を取り、 f_{3i+j} ($i \neq j$) の値域は $[0, 1)$ である。

4) 式 (12) より、明らかに f_{3i+j} の最小値は、 f_{3i+i} ($i \neq 0$) の場合である。

付録 B 補題 3.2 の証明

1) 式 (15) より, $\nabla F(\bar{\mathbf{h}})$ は BCCB である. したがって, 固有ベクトルは 2 次元 DFT 行列の行ベクトルで与えられる.

2) $\nabla F(\bar{\mathbf{h}})$ の第 k 固有値 g_k は, 2 次元 DFT により, 次のように与えられる:

$$g_k = -(\bar{v}(\bar{\mathbf{h}})/9)\delta_k + h\{1 - (1/9)\delta_k\}e_k$$

ここで, δ_k は E の第 k 固有値であり, $k = 0$ であれば 9, そうでなければ 0 である. また, e_k は $\nabla v(\bar{\mathbf{h}})$ の第 k 固有値であり, 以下のように表される:

$$e_k = h^{-1}\{bf_k - a(f_k)^2\}.$$

したがって, g が式 (16) で与えられる.

付録 C 補題 5.1 の証明

式 (8) に $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{(3)}$ を代入すると, $\nabla^\# F(\mathbf{h}_{(3)}) \equiv P \nabla F(\mathbf{h}_{(3)}) P^T$ は,

$$\nabla^\# F(\mathbf{h}_{(3)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(00)} & \mathbf{F}^{(01)} & \mathbf{F}^{(02)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{(11)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}^{(22)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{F}^{(0i)} \equiv 3h(\mathbf{I} - (1/3)\mathbf{E}_{(3)})\mathbf{v}^{(0i)} - (v_i/3)\mathbf{E}_{(3)}$$

$$\mathbf{F}^{(ii)} \equiv (\bar{v} - v_1)\mathbf{I} \quad (i = 1, 2)$$

で与えられる. ここで, v_i は $i = 0$ であれば $\bar{v}(\mathbf{h}_{(3)})$, それ以外であれば $v_1(\mathbf{h}_{(3)})$ となる変数である. また, $\mathbf{v}^{(ij)}$ は, 以下のように表される $\nabla^\# \mathbf{v}(\mathbf{h}_{(3)}) \equiv P \nabla \mathbf{v}(\mathbf{h}_{(3)}) P^T$ の i, j ブロック行列である:

$$\nabla^\# \mathbf{v}(\mathbf{h}_{(3)}) = \nabla^\# \mathbf{S} + \sigma^{-1} [\nabla^\# \mathbf{w}^{(L)} + \nabla^\# \mathbf{w}^{(H)}]$$

$$\nabla^\# \mathbf{S} \equiv (\sigma - 1)^{-1} \mathbf{M}^\#$$

$$\nabla^\# \mathbf{w}^{(L)} \equiv -\mathbf{M}^{\#T} \mathbf{M}^\#$$

$$\nabla^\# \mathbf{w}^{(H)} \equiv \mathbf{M}^{\#T} - \mathbf{M}^{\#T} \mathbf{H}_{(3)}^\# \mathbf{M}^\#$$

$\mathbf{M}^\#, \mathbf{H}_{(3)}^\#$ は, 各々, $\mathbf{M}, \text{diag}[\mathbf{h}_{(3)}]$ を P で置換した行列であり, 次のように与えられる:

$$\mathbf{M}^\# \equiv P \mathbf{M} P^T = (3h)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}^{(0)} & \hat{\mathbf{E}}_{(3)} & \hat{\mathbf{E}}_{(3)} \\ \hat{\mathbf{E}}_{(3)} & \hat{\mathbf{D}}^{(0)} & \hat{\mathbf{E}}_{(3)} \\ \hat{\mathbf{E}}_{(3)} & \hat{\mathbf{E}}_{(3)} & \hat{\mathbf{D}}^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{D}}^{(0)} = \mathbf{D}^{(0)}/d^{(0)}, \quad \hat{\mathbf{E}}_{(3)} = \mathbf{E}_{(3)}/3,$$

$$\mathbf{H}_{(3)} \equiv P \text{diag}[\mathbf{h}_{(3)}] P^T$$

$$= \text{diag}[3h, 3h, 3h, 0, 0, 0, 0, 0].$$

ここで, $d^{(0)} \equiv d_0^{(0)} \cdot \mathbf{1}$ である. 以上の結果から $v^{(ij)}$ が巡回行列であることが確認できるため, 式 (27) の各ブロック行列 $F^{(ij)}$ も巡回行列であることがわかる. したがって, $\nabla^{\sharp} F(\mathbf{h}_{(3)})$ は $\hat{Z} = \text{diag}[Z_{[3]}, Z_{[3]}, Z_{[3]}]$ による相似変換で全てのブロック行列を対角化できる. さらに, 各ブロック行列を対角化した行列は上三角行列であるため, その対角要素が $\nabla F(\mathbf{h}_{(3)})$ の固有値となる. これを計算すると, 式 (24) が得られる.

参考文献

- Akamatsu, T., Y. Takayama, and K. Ikeda (2009) “Spatial Discounting, Fourier, and Race-track Economy: A Recipe for the Analysis of Spatial Agglomeration Models,” *MPRA Paper, University Library of Munich, Germany*.
- Akamatsu, T. and Y. Takayama (2009) “A Simplified Approach to Analyzing Multi-regional Core-Periphery Models,” *MPRA Paper, University Library of Munich, Germany*.
- Behrens, K. and J.F. Thisse (2007) “Regional Economics: A New Economic Geography Perspective,” *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 37, pp. 457-465.
- Christaller, W. (1933) *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*: Gustav Fischer Verlag (English translation: *Central Place in Southern Germany*, Prentice Hall, 1966).
- Davis, P.J. (1979) *Circulant Matrices*: John Wiley & Sons.
- Forslid, R. and G.I.P. Ottaviano (2003) “An Analytically Solvable Core-Periphery Model,” *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, pp. 229-240.
- Fujita, M. (2010) “The Evolution of Spatial Economics: From Thünen to the New Economic Geography,” *The Japanese Economic Review*, Vol. 61, pp. 1-32.
- Fujita, M., P. Krugman, and A.J. Venables (1999) *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*: MIT Press.
- Fujita, M. and P. Krugman (2004) “The New Economic Geography: Past, Present and the Future,” *Papers in Regional Science*, Vol. 83, pp. 139-164.
- Fujita, M. and J.F. Thisse (2009) “New Economic Geography: An Appraisal on the Occasion of Paul Krugman’s 2008 Nobel Prize in Economic Sciences,” *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 39, pp. 109-119.
- Ikeda, K., T. Akamatsu, and T. Kono (2010) “Spatial Period-Doubling Agglomeration of a Core-Periphery Model with a System of Cities,” *TUTUP Working Paper, Tohoku University*.
- Ikeda, K. and K. Murota (2002) *Inperfect Bifurcation in Structures and Materials*: Springer.
- Krugman, P. (1991) “Increasing Returns and Economic Geography,” *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, pp. 483-499.
- (1995) *Development, Geography, and Economic Theory*: MIT Press.
- (1996) *The Self-organizing Economy*: Blackwell Publishers.

- Lösch, A. (1940) *Die Räumliche Ordnung der Wirtschaft*: Gustav Fischer (English translation: The Economics of Location, Yale University Press, 1954).
- Pflüger, M. (2004) “A Simple, Analytically Solvable, Chamberlinian Agglomeration Model,” *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 34, pp. 565-573.
- von Thünen, J.H. (1826) *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landschaft und Nationalökonomie*: Perthes(English translation: von Tunen’s Isolated State, Pergamon Press, 1966).
- 高山雄貴・赤松隆 (2010) “一次元空間における産業構造の階層化メカニズム: コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルの分岐解析,” 土木計画学研究・論文集, Vol. 27 .
- 赤松隆・高山雄貴・池田清宏・菅澤晶子・佐藤慎太郎 (2010) “1次元多都市システムにおける人口集積パターンの創発メカニズム,” 投稿中 .
- 池田清宏・河野達仁・赤松隆・柳本彰仁・八巻俊二 (2007) “都市の集積・分散モデルの対称性破壊分岐: 群論的分岐理論によるアプローチ,” 土木学会論文集 D, Vol. 63, pp.553-566 .